

TRABAJO MONOGRÁFICO

MÉTODO DEL BARICENTRO Y
RIGIDEZ DE MOSTOW

MARCOS MARTÍNEZ LEIRANES

MARZO 2023

ORIENTADOR:

SÉBASTIEN ALVAREZ
FACULTAD DE CIENCIAS, UDELAR

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
MONTEVIDEO, URUGUAY

RESUMEN

Dada M una variedad hiperbólica cerrada orientable, diremos que dos estructuras hiperbólicas son equivalentes si son isométricas. Al conjunto cociente lo llamaremos el *espacio de deformaciones hiperbólicas* y lo denotaremos $\mathcal{R}(M)$.

Resulta que en dimensión 2 este conjunto no solo es no numerable, además presenta una estructura de variedad diferenciable homeomorfa a \mathbb{R}^{6g-6} , donde g es el género de la superficie.

En contraste, probado por George Mostow en el año 1968, en dimensiones mayores a 2 el conjunto de deformación es únicamente un punto. En otras palabras, a menos de isometría, para toda variedad cerrada orientable existe a lo sumo una única estructura hiperbólica. Este resultado es conocido como la *Rigidez de Mostow*.

En esta monografía presentaremos una demostración de este resultado utilizando el método del baricentro, método utilizado por Besson, Courtois y Gallot en el año 1996 para probar un resultado aún más general.

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares	5
2.1. Hessiano y Convexidad	5
2.2. Segunda Forma Fundamental	6
2.3. Introducción a la Geometría Hiperbólica	7
3. Borde del Espacio Hiperbólico	11
3.1. Lema de Morse	11
3.2. Construcción del Borde	15
3.3. Horoesferas	19
3.4. Funciones de Busemann	20
4. Extensión Baricéntrica	23
4.1. Medidas de Visibilidad	23
4.2. Baricentro	26
4.3. El Mapa Natural	29
4.4. Lemas Auxiliares	32
5. Variedades Hiperbólicas	37
5.1. Definición y Equivalencias	37
5.2. Construcción a través de poliedros	40
5.3. Construcción con Pseudo-Anosov	41
6. Rigidez de Mostow	43
6.1. Estructuras hiperbólicas en dimensión 2	43
6.2. Demostración del Teorema	45
A. Grado de una función	47

Capítulo 1

Introducción

En general dadas dos variedades M y N con grupos fundamentales isomorfos no podemos asegurar ni siquiera que sean equivalentemente homotópicas, el teorema que estudiaremos nos asegura que si nuestras variedades son cerradas, orientables y se encuentran equipadas con una métrica hiperbólica, entonces no solo serán homotópicamente equivalentes sino que serán isométricas.

Teorema 1 (Rigidez de Mostow). *Sean M y N variedades hiperbólicas compactas y orientables de dimensión mayor o igual a 3. Supongamos que $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ es un isomorfismo entonces existe una isometría $\varphi : M \rightarrow N$ tal que $\varphi_* = \rho$*

Para probar este teorema utilizaremos el hecho que el cubrimiento universal de tanto M como N es el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n , como este es contractible entonces sabemos que los tipos de homotopía de M y N quedan determinados por el grupo fundamental. En otras palabras existe una equivalencia homotópica entre M y N . Como veremos en el capítulo 6, vamos a poder levantar esta equivalencia homotópica de forma tal que su levantado sea una cuasi-isometría equivariante en \mathbb{H}^n y esta inducirá un homeomorfismo $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ equivariante.

Si encontramos una forma de extender el homeomorfismo a todo $\overline{\mathbb{H}^n}$ de forma que en \mathbb{H}^n sea una isometría equivariante entonces probamos el teorema, es en este paso que entra la construcción de la extensión baricéntrica.

Dado $x \in \mathbb{H}^n$, le asignaremos una probabilidad $\mu_x \in \mathcal{P}(\partial\mathbb{H}^n)$ que llamaremos medida de visibilidad, mandemos para adelante esa medida a través de f , es decir tomemos la probabilidad $f_*[\mu_x]$ y tomemos el punto de \mathbb{H}^n que se encuentra a distancia “promedio” mínima de los puntos del borde con respecto a la medida $f_*[\mu_x]$, a este punto lo llamaremos baricentro de la medida $f_*[\mu_x]$, notar que esto nos define un mapa $F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$. Resulta que este mapa se caracteriza por tener muy buenas propiedades como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 2. *Sea $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ un homeomorfismo y F su extensión baricéntrica, entonces F es una función suave. Si la dimensión n es mayor o igual a 3 entonces*

$$|\text{Jac}_x F| := \sqrt{|\det((D_x F)^* D_x F)|} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{H}^n$$

Además si para algún x vale la igualdad entonces $D_x F : T_x \mathbb{H}^n \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{H}^n$ es una isometría

Lo interesante es que en nuestro caso la extensión baricéntrica será una isometría que bajará al cociente y con esto terminaremos de probar la Rigidez de Mostow.

En el segundo capítulo introduciremos la noción de convexidad y la definición de Hessiano, estos conceptos serán claves a la hora de probar la existencia y unicidad del baricentro. También definiremos la segunda forma fundamental de una hipersuperficie y la curvatura geodésica, esto nos ayudará principalmente para calcular el Hessiano de funciones que necesitaremos. Por último presentamos al espacio hiperbólico \mathbb{H}^n en los modelos del semi-espacio superior y de la Bola de Poincaré, veremos cuales son las geodésicas, las isometrías en esos modelos, entre otras cosas.

En el tercer capítulo nos dedicaremos a compactificar al espacio hiperbólico construyendo el borde $\partial\mathbb{H}^n$ a partir de la geometría, veremos que en los modelos que estamos trabajando esta es equivalente a tomar la clausura topológica de los conjuntos. Presentaremos a las horoesferas y a las funciones de Busemann que nos cuantificaran una noción de distancia relativa entre puntos del espacio hiperbólico y puntos del borde, calcularemos el hessiano de las funciones de Buseman y veremos que las horoesferas son las hipersuperficies de nivel de estas funciones.

En el cuarto capítulo nos dedicaremos a construir la extensión baricéntrica. Comenzaremos con las medidas de visibilidad, veremos que estas tienen un buen comportamiento con las isometrías y que se relacionan con las funciones de Busemann. Continuaremos definiendo el concepto del baricentro asociado a una medida y nos cuestionaremos en qué situaciones podemos asegurar la existencia y unicidad del mismo. Finalmente, en las últimas dos secciones nos dedicaremos a probar el Teorema 2.

En el quinto capítulo introduciremos el concepto de variedad hiperbólica, veremos formas equivalentes de pensarlas, presentaremos las condiciones geométricas necesarias para ver cuando un poliedro geodésico es el dominio fundamental de una variedad y comentaremos, sin dar muchos detalles, como construir una 3-variedad hiperbólica cerrada orientable.

Finalmente en el último capítulo introduciremos, de forma más minuciosa, el espacio de deformación, hablaremos brevemente sobre $\mathcal{R}(M)$ cuando M es una superficie y terminaremos probando el Teorema 1.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Hessiano y Convexidad

Consideremos (M, g) una variedad Riemanniana, denotaremos $D_U V$ a la derivada covariante del campo V en dirección U .

Por simplicidad, dados $p \in M$ y $u, v \in T_p M$ denotaremos

$$\langle u, v \rangle := g(u, v) \quad \text{y} \quad \|u\| := \langle u, v \rangle^{\frac{1}{2}}$$

Definición 2.1.1. *Definimos el hessiano como*

$$\text{Hess}_x f(u, v) := g(D_u \nabla f(x), v)$$

Es claro que el Hessiano es tanto bilineal como simétrico.

Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa si para todo $a < b$ y $s \in (0, 1)$

$$f(a + s(b - a)) \leq f(a) + s(f(b) - f(a))$$

Diremos que f es estrictamente convexa si la desigualdad es estricta. Un subconjunto W de M es convexo si para todo par $p, q \in W$ la geodésica más corta está contenida en W . Una función $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ es (estrictamente) convexa si para toda geodésica no trivial $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, $g \circ \gamma$ es (estrictamente) convexa.

Proposición. 2.1.2. *Sea W subconjunto convexo de una variedad Riemanniana M y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función convexa diferenciable. Entonces los únicos puntos críticos en $\overset{\circ}{W}$ presentan un mínimo. Si f es estrictamente convexa, entonces a lo sumo existe un punto crítico.*

Proposición. 2.1.3. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ función C^2 , entonces f es (estrictamente) convexa si y solo si $\text{Hess } f$ es semidefinida (definida) positiva.*

Las demostraciones de estas proposiciones no son extremadamente complicadas, recondamos ver [13] para formalizar más.

2.2. Segunda Forma Fundamental

Sean (\hat{M}, \hat{g}) una variedad Riemanniana de dimensión m , M una variedad de dimensión n y $\iota : M \rightarrow \hat{M}$ un encaje. Si M está inducida con la métrica riemanniana $g := \iota^*\hat{g}$, entonces diremos que ι es un encaje isométrico, que M es una subvariedad Riemanniana (o por simplicidad subvariedad) de \hat{M} y que \hat{M} es la variedad ambiente. A partir de ahora M será una subvariedad de codimensión 1, que llamaremos hipersuperficie.

Definición 2.2.1. Definimos la segunda forma fundamental vectorial de M para $p \in M$ y $u, v \in T_p M$ como:

$$II(u, v) = \left(\hat{D}_U V - D_U V \right)_p$$

donde \hat{D} y D son las derivadas covariantes de \hat{M} y M respectivamente y tanto U como V son campos de vectores de $p \in \hat{M}$ tangentes a M en todo punto de M , y con valores u y v en p respectivamente.

No es difícil ver que el valor no depende de la elección de los campos de vectores, que es bilineal y que es simétrica, además

$$II(u, v) = \left(\hat{D}_U V \right)_p^\perp$$

Siempre es posible construir un campo normal local ν sobre M , esto se sigue del hecho que para todo punto $p \in M$ existe una submersión $f : U \subset \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = U \cap M$ y por lo tanto $\nu := \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ nos sirve, este campo es único a menos de un signo. Si tanto M como \hat{M} son orientables entonces se puede probar que existe un campo normal globalmente. Fijando tal campo, daremos las siguientes definiciones.

Definición 2.2.2. Dados $p \in M$ y $u, v \in T_p M$ definimos la segunda forma fundamental real ℓ de M como:

$$II(u, v) = \ell(u, v)\nu_p$$

El operador de forma se define como el endomorfismo $S : T_p M \rightarrow T_p M$ dado por $S(u) = \hat{D}_u \nu$

Observación 2.2.3. Es claro que S es un endomorfismo del hecho que

$$\langle \hat{D}_u \nu, \nu \rangle = \frac{1}{2} D(\langle \nu, \nu \rangle)(u) = 0$$

Por otro lado se tiene que $\langle S(\cdot), \cdot \rangle = -\ell(\cdot, \cdot)$, esto se sigue del hecho que

$$\langle S(u), v \rangle = \langle \hat{D}_u \nu, v \rangle = -\langle \nu, \hat{D}_u V \rangle = -\ell(u, v)$$

De la definición podemos interpretar a la segunda forma fundamental como una “medida” de la diferencia entre la conexión intrínseca de M y la conexión ambiental de \hat{M} . Estudiando la curvatura de curvas podemos dar una intuición aun más geométrica de II .

Sea $\alpha : I \rightarrow M$ una curva parametrizada por longitud de arco, definimos la curvatura geodésica de α como $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\kappa(t) := \|D_t \dot{\alpha}(t)\| \quad \text{donde} \quad D_t \dot{\alpha}(t) = D_{\dot{\alpha}(t)} \dot{\alpha}(t)$$

Claramente $\kappa \equiv 0$ si y sólo si α es una geodésica, por lo que podemos interpretar a la curvatura geodésica como una cantidad que nos dice cuán alejada está la curva en ser una geodésica. Si α es una curva en M , entonces tiene dos curvaturas geodésicas distintas, una curvatura “intrínseca” κ como curva en M

y una curvatura “extrínseca” $\hat{\kappa}$ como curva en \hat{M} . Por lo tanto la segunda forma fundamental puede ser utilizada para ver la relación entre estas dos cantidades. Directo de las definiciones tenemos que si V es un campo sobre α entonces

$$\hat{D}_t V = \hat{D}_{\dot{\alpha}} V = D_{\dot{\alpha}} V + II(\cdot, V) = D_t V + II(\dot{\alpha}, V)$$

Aplicando esta igualdad en el caso que $V = \dot{\alpha}$ tenemos que $\hat{D}_t \dot{\alpha} = D_t \dot{\alpha} + II(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})$, si además α es una geodésica en M entonces

$$\hat{D}_t \dot{\alpha} = II(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})$$

Esta última ecuación nos proporciona la siguiente interpretación geométrica:

Para todo vector $v \in T_p M$, $II(v, v)$ es la \hat{g} -aceleración en p de la g -geodésica γ que sale de p con velocidad v . Si v es un vector unitario, entonces $\|II(v, v)\|$ es la \hat{g} -curvatura de γ en p .

Del hecho que la segunda forma fundamental es una forma bilineal simétrica se sigue que está completamente determinada por su valor en los vectores tangentes unitarios de M .

La siguiente proposición nos servirá para ver una definición equivalente de la curvatura geodésica que nos será más útil a la hora de calcularla.

Proposición. 2.2.4. *Sean X e Y variedades y $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ puntos. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ mapas C^k con $k \geq 1$ tal que $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Entonces si en algún mapa de coordenadas locales cerca de x_0 tenemos que $(f - g) \in o(|x - x_0|^{k-1})$, entonces esto es cierto para todo mapa de coordenadas locales, y el término de grado k de $f - g$ son mapas bien definidos $T_{x_0} X \rightarrow T_{y_0} Y$.*

Sean $\alpha : I \rightarrow M$ una curva suave parametrizada por longitud de arco y $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica que cumplen:

$$\alpha(t_0) = \gamma(t_0) = x_0, \quad \dot{\alpha}(t_0) = \dot{\gamma}(t_0).$$

Entonces en t_0 la función $\alpha - \gamma$ y su derivada se anulan, luego por la proposición anterior tenemos que el término cuadrático $\alpha - \gamma$ en t_0 está bien definido como mapa cuadrático $\mathbb{R} \rightarrow T_{x_0} M \quad s \mapsto \frac{s^2}{2} v$ para algún $v \in T_{x_0} M$, se sigue que la curvatura geodésica es $\|v\|$.

Como última propiedad veremos la siguiente relación entre el hessiano y la segunda forma fundamental.

Proposición. 2.2.5. *Sea $f : \hat{M} \rightarrow \mathbb{R}$ función suave. Entonces*

$$\text{Hess}(f|_M) = \text{Hess}(f)|_{TM} - Df(\nu)\ell$$

Recomendamos ver [7] y [8] para ver demostraciones de las proposiciones.

2.3. Introducción a la Geometría Hiperbólica

Para esta sección nos basaremos de [1]. Asumamos que $n \geq 2$, definiremos la n -variedad Riemmaniana, que llamaremos *espacio hiperbólico* \mathbb{H}^n a través de los siguientes modelos isométricos.

1. **Semi-espacio superior:** Definimos el semiespacio superior como $\mathcal{H}^{n,+} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : t > 0\}$ con la métrica Riemanniana

$$g_{(x,t)}(u, v) := \frac{1}{t} \langle u, v \rangle_{euc}$$

2. **Bola de Poincaré:** Denotaremos \mathbb{B}^n es la bola unitaria usual con la métrica Riemanniana

$$g_p(u, v) = 4 \frac{\langle u, v \rangle_{euc}}{1 - \|p\|_{euc}^2}$$

Donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{euc}$ y $\|\cdot\|_{euc}$ son el producto interno y norma usual de \mathbb{R}^n respectivamente.

Observación 2.3.1. Para ver que estos modelos son isométricos basta considerar el difeomorfismo $i : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathcal{H}^{n,+}$

$$i(x) = 2 \frac{x + e_n}{\|x + e_n\|_{euc}} - e_n$$

Sean $U, V \subset \mathbb{R}^n$ dominios, diremos que un difeomorfismo $f : U \rightarrow V$ es un mapa conforme si existe una función diferenciable $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\langle D_x(u), D_x(v) \rangle_{euc} = \lambda(x) \langle u, v \rangle_{euc}$$

Al conjunto de mapas conformes lo denotaremos $Conf(U, V)$, si además preservan orientación lo denotaremos $Conf^+(U, V)$. En el caso que $U = V$ por simplicidad escribiremos $Conf(U)$ o $Conf^+(U)$ respectivamente.

Proposición. 2.3.2. $Conf(\mathbb{B}^n)$ consiste en los mapas de la forma

$$x \mapsto Ai(x),$$

donde A es una matriz ortogonal e i es la identidad o la inversión con respecto a alguna esfera ortogonal a $\partial\mathbb{B}^n$.

$Conf(\mathcal{H}^{n,+})$ consiste en los mapas de la forma

$$x \mapsto \lambda \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} i(x) + \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda > 0$, A es una matriz ortogonal de dimensión $n - 1$, i es la identidad o la inversión con respecto alguna esfera ortogonal a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ y $b \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Resulta que las isometrías $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ son exactamente las funciones conformes en \mathbb{B}^n en el modelo de la bola y las funciones conformes en $\mathcal{H}^{n,+}$ en el modelo del semi-espacio, misma cosa se cumple en el caso de las isometrías que preservan orientación $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$. En particular tenemos que tanto $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ como $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ actúan transitivamente.

Observación 2.3.3. En dimensiones 2 y 3 podemos identificar a $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ con los grupos $PSL_2(\mathbb{R})$ y $PSL_2(\mathbb{C})$ respectivamente.

Diremos que un subconjunto N de \mathbb{H}^n es un subespacio hiperbólico si dados dos puntos en $x, y \in \mathbb{H}^n$, la geodésica que los une también se encuentra en N , las siguientes proposiciones nos caracterizan los subespacios en los modelos que estamos estudiando.

Proposición. 2.3.4. $N \subset \mathbb{B}^n$ es un subespacio hiperbólico si y solo si es la intersección de \mathbb{B}^n con un subespacio de \mathbb{R}^n o con una esfera ortogonal a $\partial\mathbb{B}^n$. En particular las geodésicas son parametrizaciones de diámetros de \mathbb{B}^n y círculos ortogonales a $\partial\mathbb{B}^n$.

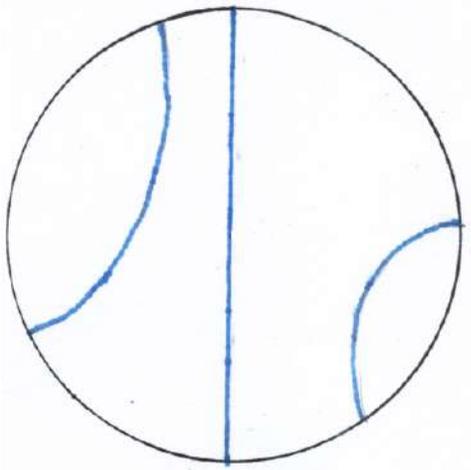


Figura 2.1: Geodésicas del Disco

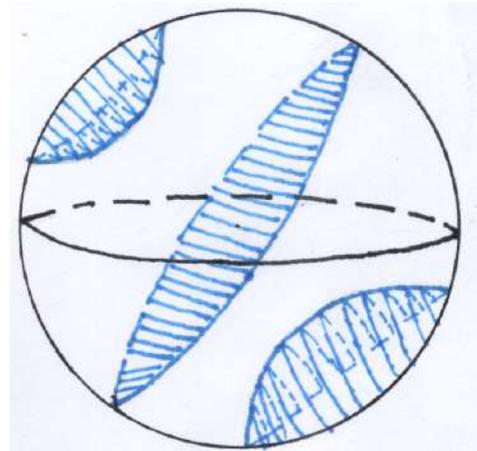


Figura 2.2: Planos hiperbólicos de la Bola

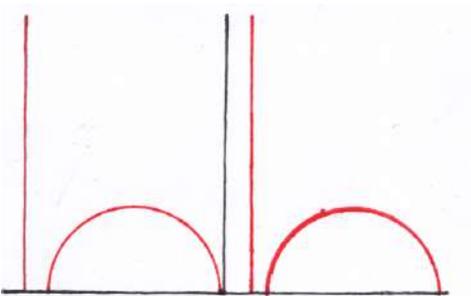


Figura 2.3: Geodésicas del Semi-Plano

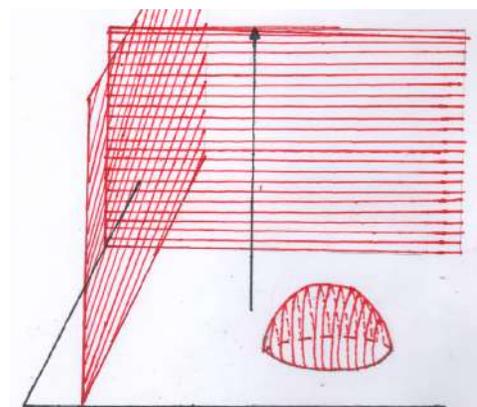


Figura 2.4: Planos hiperbólicos del Semi-Espacio

Proposición. 2.3.5. $N \subset \mathcal{H}^{n,+}$ es un subespacio hiperbólico si y solo si es la intersección de $\mathcal{H}^{n,+}$ con un subespacio vertical afín o con una esfera ortogonal a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. En particular las geodésicas son obtenidas por parametrización de rectas verticales y círculos ortogonales a $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$.

Estas proposiciones nos muestra que los subespacios son variedades y en particular que existe la noción de dimensión del subespacio, es fácil ver además que si tenemos un subespacio hiperbólico de dimensión p en \mathbb{H}^n entonces este es isométrico a \mathbb{H}^p .

Lema 2.3.6. 1. Para $x, y \in \mathbb{B}^n$ tenemos

$$d(x, y) = 2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{\|x - y\|_{euc}}{(1 - 2\langle x, y \rangle_{euc} + \|x\|_{euc}^2 + \|y\|_{euc}^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

2. Para $(x, t), (y, s) \in \mathcal{H}^{n,+}$ tenemos

$$d((x, t), (y, s)) = 2 \operatorname{arctanh} \left(\frac{\|x - y\|_{euc}^2 + (t - s)^2}{\|x - y\|_{euc}^2 + (t + s)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dada una variedad Riemanniana M , definimos la curvatura seccional en un punto $x \in M$ con respecto al plano $V \subset T_x M$ como la curvatura en x de la superficie obtenida como la imagen de la función exponencial de un entorno pequeño de 0.

La curvatura seccional de \mathbb{H}^n en un punto x con respecto a $V \subset T_x \mathbb{H}^n$ es independiente de V , x y n y vale -1 .

Capítulo 3

Borde del Espacio Hiperbólico

En los modelos que presentamos del espacio hiperbólico existen nociones de borde topológico ya conocidas. En el caso de \mathbb{B}^n identificamos al borde como la esfera unitaria \mathbb{S}^{n-1} y en el caso de $\mathcal{H}^{n,+}$ identificamos al borde como $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$. Como objetivo de las primeras dos secciones de este capítulo, construiremos un borde para el espacio hiperbólico, que posteriormente será equivalente al topológico, utilizando únicamente la geometría, para la primera sección nos basaremos de [4] y para la segunda en su mayoría de [1].

En las últimas dos secciones introduciremos a las horoesferas y a las funciones de Busemann, veremos sus propiedades geométricas y las relaciones entre ellas, nos basaremos en esas secciones de [1], [6] y [10].

3.1. Lema de Morse

El espacio hiperbólico es totalmente geodésico, es decir, dados $x, y \in \mathbb{H}^n$ existe un segmento geodésico que los une que denotaremos $[x, y]$. Esto nos permite generalizar la noción de triángulo al contexto de la geometría hiperbólica:

Un triángulo geodésico $\Delta([x, y], [y, z], [x, z])$ en \mathbb{H}^n consiste en la unión de tres puntos x, y, z y sus respectivos segmentos geodésicos.

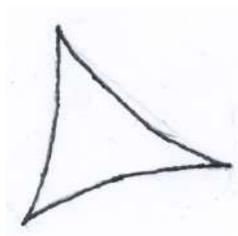


Figura 3.1: Triángulo Hiperbólico

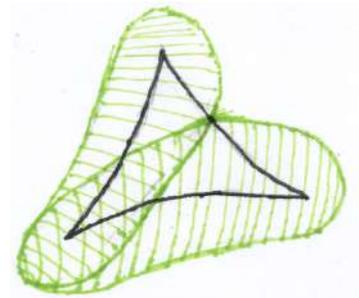


Figura 3.2: δ -entornos

Diremos que un triángulo es δ -fino si fijado uno de los lados, este se encuentra en un δ -entorno de los lados restantes. No es difícil construir ejemplos en geometría euclídea de triángulos que no cumplan ser δ -finos para todo $\delta > 0$, sin embargo, como veremos en la siguiente proposición esta propiedad si se cumple en el caso hiperbólico.

Proposición 3.1.1. *Existe $\delta > 0$ tal que todo triángulo geodésico de \mathbb{H}^n es 2-fino.*

Demostración.

Es claro que todo triángulo geodésico está incluido en un 2-plano geodésico, por lo tanto podemos probarlo en \mathbb{H}^2 . Para probar la proposición utilizaremos la siguiente afirmación que no probaremos.

Afirmación. *El área de un círculo de radio r es $2\pi(\cosh r - 1)$. El área de todo triángulo es a lo sumo π .*

Usando la segunda parte de la afirmación se tiene que todo círculo inscripto en un triángulo es de área estrictamente menor a π , utilizando la primera parte de la afirmación concluimos que el radio es menor a $\cosh^{-1}(\frac{3}{2}) < 1$.

Consideremos Δ un triángulo y $x \in \Delta$, sea D un disco de radio 1 tangente a x , entonces el disco tiene que intersectar otro de los lados del triángulo en un punto y . Como tanto x como y caen en el círculo de radio 1 se obtiene que $d(x, y) \leq 2$.

□

Definición 3.1.2. *Dados (X, d) e (Y, d') espacios métricos, diremos que $f : X \rightarrow Y$ es un encaje (λ, ε) -cuasi-isométrico si*

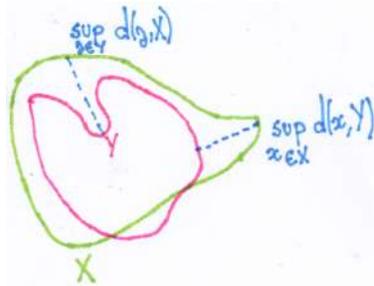
$$\lambda^{-1}d(x, y) - \varepsilon \leq d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + \varepsilon$$

Si además se cumple que $f(X)$ es c -denso para algún $c > 0$, entonces diremos que f es una (λ, ε) -cuasi-isometría. En el caso que $X = I \subset \mathbb{R}$ intervalo y $d(x, y) = |x - y|$, diremos que f es una (λ, ε) -cuasi-geodésica.

Observación 3.1.3. *La importancia de pedir que $f(X)$ sea c -denso es que implica que existe un encaje cuasi-isométrico “inverso” $g : Y \rightarrow X$.*

Definición 3.1.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y $V_\varepsilon(A), V_\varepsilon(B)$ ε -entornos de $A, B \subset X$ respectivamente. Definimos la distancia Hausdorff entre los conjuntos como*

$$d_H(A, B) := \inf\{\varepsilon : A \subset V_\varepsilon(B) \text{ y } B \subset V_\varepsilon(A)\}$$



No es difícil ver que esta definición es equivalente a

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(A, b)\}$$

Una posible interpretación geométrica de esta distancia es que dos conjuntos se encuentran “cerca” si todo punto de ambos conjuntos se encuentra “cerca” de algún punto del otro conjunto.

En lo que resta de la sección, nos enfocaremos en probar lo siguiente:

Teorema 3.1.5 (Lema de Morse). *Para todo $\lambda \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$ existe una constante R que cumple lo siguiente:*

Si α es una (λ, ε) -cuasi-geodésica en \mathbb{H}^n y $[p, q]$ es el segmento geodésico que une a los puntos borde de α , entonces la distancia Hausdorff entre $[p, q]$ y α es menor a R .

Proposición. 3.1.6. *Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{H}^n$ continua y rectificable. Si $[p, q]$ es un segmento geodésico que conecta los puntos borde de α y $\ell(\alpha)$ es la longitud de la curva, entonces para todo $x \in [p, q]$*

$$d(x, \text{im}(\alpha)) \leq \delta |\log_2 \ell(\alpha)| + 1$$

Demostración.

Si $\ell(\alpha) \leq 1$ el resultado es trivial. Supongamos $\ell(\alpha) > 1$, sin pérdida de generalidad asumamos que α es un mapa de $[0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^n$ que parametriza su imagen proporcional a su longitud de arco con $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$. Sea N el entero positivo que cumple que

$$\frac{\ell(\alpha)}{2^{N+1}} < 1 \leq \frac{\ell(\alpha)}{2^N}$$

Sea $\Delta_1 = \Delta([\alpha(0), \alpha(1/2)], [\alpha(1/2), \alpha(1)], [\alpha(0), \alpha(1)])$ un triángulo geodésico en \mathbb{H}^n conteniendo a la geodésica $[\alpha(0), \alpha(1)]$. Sea $x \in [\alpha(0), \alpha(1)]$, por ser el triángulo δ -fino tomemos $y_1 \in [\alpha(0), \alpha(1/2)] \cup [\alpha(1/2), \alpha(1)]$ con $d(x, y_1) \leq \delta$.

Si $y_1 \in [\alpha(0), \alpha(1/2)]$ consideremos el triángulo geodésico $\Delta_2 := \Delta([\alpha(0), \alpha(1/2)], [\alpha(1/4), \alpha(1/2)], [\alpha(0), \alpha(1/4)])$, que tiene en común con Δ_1 el lado $[\alpha(0), \alpha(1/2)]$. Si $y_1 \in [\alpha(1/2), \alpha(1)]$, realizamos el proceso análogo tomando $\alpha(3/4)$ en vez de $\alpha(1/4)$.

Realizamos este proceso de forma inductiva, es decir, en el paso $n + 1$ consideramos el triángulo Δ_{n+1} que tiene en común con Δ_n el lado $[\alpha(t_n), \alpha(t'_n)]$ que contiene a y_n y con el tercer vértice siendo $\alpha(t_{n+1})$, donde $t_{n+1} := \frac{t_n + t'_n}{2}$. Tomamos $y_{n+1} \in \Delta_{n+1} \setminus [\alpha(t_n), \alpha(t'_n)]$ con $d(y_n, y_{n+1}) \leq \delta$.

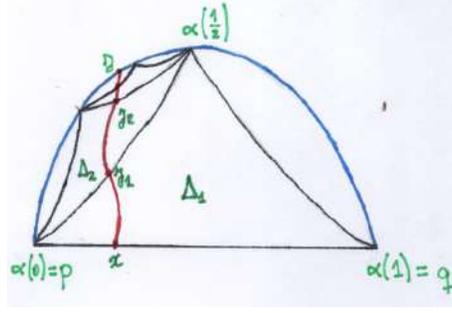
En el paso N -ésimo de la construcción obtenemos un punto y_N que se encuentra a lo sumo δN de x y que cae en un intervalo de largo $\ell(\alpha)/2^N$ con puntos borde en la imagen de α . Definimos y como el punto más cercano al intervalo, como $\ell(\alpha)/2^{N+1} < 1$ y $2^N \leq \ell(\alpha)$ obtenemos que

$$d(x, y) \leq \delta |\log_2 \ell(\alpha)| + 1$$

□

Lema 3.1.7 (Domando cuasi-geodésicas). *Dada una (λ, ε) -cuasi-geodésica $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$, entonces existe una (λ, ε') -cuasi-geodésica continua $\hat{\alpha} : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^n$ tal que*

1. $\hat{\alpha}(a) = \alpha(a)$ y $\hat{\alpha}(b) = \alpha(b)$
2. $\varepsilon' = 2(\lambda + \varepsilon)$



3. $\ell(\hat{\alpha}|_{[t,t']}) \leq k_1 d(\hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}(t')) + k_2$ para todo $t, t' \in [a, b]$ donde $k_1 = \lambda(\lambda + \varepsilon)$ y $k_2 = (\lambda\varepsilon' + 3)(\lambda + \varepsilon)$

4. La distancia Hausdorff entre α y $\hat{\alpha}$ es menor a $\lambda + \varepsilon$

Demostración.

Definimos $\hat{\alpha}$ para que coincida en $\Sigma := \{a, b\} \cap (\mathbb{Z} \cap (a, b))$. Consideramos los segmentos geodésicos que unen los puntos sucesivos en Σ y definimos $\hat{\alpha}$ concatenando a los segmentos geodésicos por parametrizaciones lineales. Notar que el largo de cada segmento geodésico es a lo sumo $\lambda + \varepsilon$. Todo punto de $im(\alpha) \cup im(\hat{\alpha})$ cae en un $(\lambda + \varepsilon)/2$ entorno de $\alpha(\Sigma)$, por lo que (4) se cumple.



Denotamos $[t]$ al punto de Σ más cercano a $t \in [a, b]$. Como α es una (λ, ε) -cuasi geodésica y $\alpha([t]) = \hat{\alpha}([t])$ para todo $t \in [a, b]$.

De las siguientes operaciones deduciremos que $\hat{\alpha}$ es una (λ, ε') -cuasi-geodésica con ε' como en (2).

$$d(\hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}(t')) \leq d(\hat{\alpha}([t]), \hat{\alpha}([t'])) + (\lambda + \varepsilon) \leq \lambda|[t] - [t']| + \varepsilon + (\lambda + \varepsilon) \leq \lambda(|t - t'| + 1) + (\lambda + 2\varepsilon) \quad y$$

$$\frac{1}{\lambda}|t - t'| - 2(\lambda + \varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}(|t - t'| - 1) - (\lambda + 2\varepsilon) \leq \frac{1}{\lambda}(|t - t'|) - (\lambda + 2\varepsilon) \leq d(\hat{\alpha}([t]), \hat{\alpha}([t'])) - (\lambda + \varepsilon) \leq d(\hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}(t'))$$

Para todo entero $n, m \in [a, b]$ se tiene que

$$\ell(\hat{\alpha}|_{[n,m]}) = \sum_{i=n}^{m-1} d(\alpha(i), \alpha(i+1)) \leq (\lambda + \varepsilon)|m - n|.$$

De forma similar se tiene que $\ell(\hat{\alpha}|_{[a,m]}) \leq (\lambda + \varepsilon)(m - a + 1)$ y $\ell(\hat{\alpha}|_{[n,b]}) \leq (\lambda + \varepsilon)(b - n + 1)$, deduciendo que para todo $t, t' \in [a, b]$ tenemos que

$$\ell(\hat{\alpha}|_{[t,t']}) \leq (\lambda + \varepsilon)(|[t] - [t']| - 1) - \varepsilon' \quad y \quad d(\hat{\alpha}(t), \hat{\alpha}(t')) \geq \frac{1}{\lambda}|t - t'| - \varepsilon' \geq (|[t] - [t']| - 1) - \varepsilon'$$

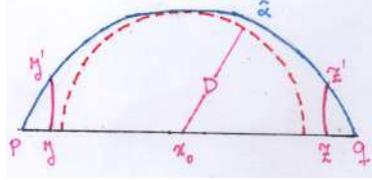
Combinando esas desigualdad y utilizando que $\varepsilon \leq \varepsilon'$ obtenemos (3).

□

Demostración del Lema de Morse.

Supongamos sin pérdida de generalidad que α cumple las propiedades del lema. Sea $D = \sup\{d(x, im\alpha) \mid x \in [p, q]\}$ y x_0 un punto de $[p, q]$ en el que el supremo ocurre. Se sigue que la bola de radio D con centro x_0 no intersecta $im(\alpha)$. Utilizaremos la proposición que vimos al principio para estimar D .

Sea y un punto en $[p, x_0] \subset [p, q]$ que se encuentre a distancia $2D$ de x_0 (si $d(x_0, p) < 2D$ entonces $y = p$), elegimos $z \in [x_0, q]$ de forma análoga. Fijamos $y', z' \in im(\alpha)$ con $d(y, y') \leq D$ y $d(z, z') \leq D$. Definimos la curva β de y a z que va $[y, y']$, sigue por α de y' a z' y luego $[z', z]$. El camino no pasa por $B(x_0, D)$.



Como $d(y', z') \leq d(y', y) + d(y, z) + d(z, z') \leq 6D$ se sigue que $\ell(\alpha) \leq 6Dk_1 + k_2 + 2D$ y como $d(x_0, im(\beta)) = D$ se sigue que $D - 1 \leq \delta |\log_2 \ell(\beta)|$. Entonces

$$D - 1 \leq \delta \log_2(6Dk_1 + k_2 + 2D),$$

por lo que una cota superior de D depende únicamente de λ y ε que denotaremos D_0 .

Veamos que $im(\alpha)$ está contenido en un R -entorno de $[p, q]$, donde $R = D_0(1 + k_1) + k_2/2$. Consideremos un subintervalo maximal $[a', b'] \subset [a, b]$ tal que $\alpha([a', b'])$ cae fuera de un D_0 -entorno $V_{D_0}[p, q]$. Todo punto de $[p, q]$ cae de $V_{D_0}(im(\alpha))$, por conexión existen $w \in [p, q]$, $t \in [a, a']$ y $t' \in [b', b]$ tal que $d(w, \alpha(t)) \leq D_0$ y $d(w, \alpha(t')) \leq D_0$. En particular $d(\alpha(t), \alpha(t')) \leq 2D_0$ y por lo tanto $\ell(\alpha|_{[t, t']}) \leq 2k_1D_0 + k_2$ y por lo tanto $im(\alpha)$ está contenida en un entorno R -entorno de $[p, q]$. \square

3.2. Construcción del Borde

Diremos que dos rayos geodésicos $\gamma, \hat{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ son asintóticos si $\sup_t d(\gamma(t), \hat{\gamma}(t))$ es finito, o análogamente si la distancia Hausdorff entre γ y $\hat{\gamma}$ es finita, es claro que ser asintótico es una relación de equivalencia. El conjunto cociente lo denotaremos $\partial\mathbb{H}^n$ y diremos que es el *borde de* \mathbb{H}^n . A las clases de equivalencia las denotaremos $\gamma(\infty)$ y las denominaremos *puntos al infinito*. Equivalentemente podemos definir ser asintótico para rayos cuasi-geodésicos, al cociente lo denotaremos $\partial_q\mathbb{H}^n$.

Lema 3.2.1. *El mapa canónico de $\partial\mathbb{H}^n$ a $\partial_q\mathbb{H}^n$ es una biyección. Además para todo $p \in \mathbb{H}^n$ y $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ existe un rayo geodésico $\gamma(0) = p$ y $\gamma(\infty) = \xi$*

Demostración.

El mapa que va $\partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial_q\mathbb{H}^n$ es claramente inyectivo. Para probar lo que sigue, consideremos $x \in \mathbb{H}^n$ y $\alpha : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ un rayo cuasi-geodésico. Definimos γ_n como la geodésica que cumple que $\gamma_n(0) = p$ y que une a p con $\alpha(n)$. Por Arzelá-Ascoli tenemos que γ_n converge a un rayo geodésico $\gamma_\infty : [0, \infty)$. Por el Lema de Morse sabemos que existe una constante $R > 0$ tal que para todo $n > 0$, la distancia Hausdorff de γ_n con $\alpha([0, n])$ es menor a k , por lo tanto α y γ_∞ son rayos asintóticos. \square

Observación 3.2.2. Si f es una cuasi-isometría y γ es una geodésica, entonces sabemos que $f \circ \gamma$ es una cuasi-geodésica. El lema anterior en particular nos dice que podemos pensar $f \circ \gamma(\infty)$ en $\partial\mathbb{H}^n$.

Nuestro interés es poder darle una topología al conjunto $\overline{\mathbb{H}^n} := \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ de tal forma que $\overline{\mathbb{H}^n}$ es compacto y \mathbb{H}^n un abierto de forma que la topología que herede de su clausura sea su propia topología. Para esto dado $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ definimos un entorno de la siguiente manera:

Consideremos γ rayo geodésico que cumple que $\gamma(\infty) = \xi$, sean $x := \gamma(0)$, V un entorno de $\dot{\gamma}(0)$ en $T_x^1\mathbb{H}^n$ y $r > 0$, definimos el conjunto

$$U(\gamma, V, r) := \{\hat{\gamma}(t) : \hat{\gamma} \text{ geodésica, } \hat{\gamma}(0) \in V, t > r\} \cup \{\hat{\gamma}(\infty) : \hat{\gamma} \text{ geodésica, } \hat{\gamma}(0) = x, \hat{\gamma}(0) \in V\}$$

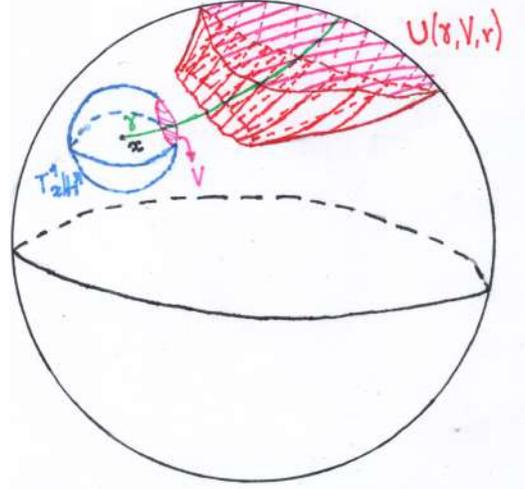


Figura 3.3: Interpretación de la Topología de $\overline{\mathbb{H}^n}$

Es claro que esto define una topología en $\overline{\mathbb{H}^n}$, además el corolario 3.2.6 nos sirve para deducir que la topología no depende del punto x elegido. Por otro lado, por definición es claro que $\overline{\mathbb{H}^n}$ cumple el primer axioma de numerabilidad, se sigue que la clausura es compacta si y solo si es secuencialmente compacto, esto último es obvio de Arzelá-Ascoli. En lo que resta de la sección veremos la utilidad de $\partial\mathbb{H}^n$.

Proposición. 3.2.3. $\partial\mathbb{H}^n$ es homeomorfo a \mathbb{S}^{n-1} y $\overline{\mathbb{H}^n}$ es homeomorfo a $\overline{\mathbb{B}^n}$. En particular, si consideramos el modelo de la bola de Poincaré entonces la identificación es canónica.

Para la demostración de esta proposición necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.2.4. Consideremos $x \in \mathbb{H}^n$ y $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$, entonces existe un único rayo geodésico $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(\infty) = \xi$.

Demostración.

La existencia la probamos en el lema 3.2.1., para ver la unicidad supongamos que nos encontramos en \mathbb{H}^2 , en el modelo del disco y que $x = 0$. Observar que para ver la unicidad basta ver que dos rayos geodésicos γ y $\hat{\gamma}$ con mismo punto inicial y distintos vectores velocidad cumplen que

$$d(\gamma(t), \hat{\gamma}(t)) \longrightarrow \infty \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

Para probar esto último basta verlo para dos semirectas que salen del origen en el modelo de la bola de Poincaré y esto último es una cuenta directa a partir de la ecuación de la distancia. \square

Demostración de la Proposición 3.2.3.

El lema 2.2.4. nos proporciona una biyección entre $T_x^1\mathbb{H}^n$ y $\partial\mathbb{H}^n$, como estos espacios son compactos basta ver que la correspondencia $T_x^1\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ es continua, esto último es obvio por definición de la topología. \square

Esto en particular nos permite pensar a $\overline{\mathbb{H}^n}$ como $\overline{\mathbb{B}^n}$ o como $\mathcal{H}^{+,n} \cup \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\}$ de forma canónica. Además nos proporciona, de forma directa, propiedades del borde.

Corolario. 3.2.5. *Para todo par $\xi_1, \xi_2 \in \partial\mathbb{H}^n$ existe una única geodésica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ con $\gamma(\infty) = \xi_1$ y $\gamma(-\infty) = \xi_2$*

Corolario. 3.2.6. *Sean $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ rayos geodésicos con $\gamma_1(\infty) = \gamma_2(\infty)$. Entonces existen $T_1, T_2 > 0$ tal que $d(\gamma_1(T_1 + t), \gamma_2(T_2 + t)) \leq K$ para todo $t \geq 0$ con K constante.*

Proposición. 3.2.7. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Todas las isometrías de \mathbb{H}^n se extienden a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{H}^n}$, y por lo tanto tienen un punto fijo en $\overline{\mathbb{H}^n}$.*

2. *$\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ e $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$ operan transitivamente en $\partial\mathbb{H}^n$ y en el conjunto*

$$\{(x, v) : x \in \mathbb{H}^n, v \in T_x\mathbb{H}^n, \|v\| = 1\}$$

3. *Un elemento de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ está únicamente determinado por sus valores en $\partial\mathbb{H}^n$.*

4. *$\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es isomorfo a los grupos $Conf((S)^{n-1})$ y $Conf(\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \cup \{\infty\})$*

Demostración.

Todas las propiedades se siguen del hecho que las funciones conformes se extienden a la esfera de forma invariante, la propiedad del punto fijo se deduce del Teorema del punto fijo Brower. \square

Con esto podemos clasificar las isometrías de \mathbb{H}^n de la siguiente forma:

Proposición. 3.2.8. *$\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ puede cumplir únicamente una de las siguientes posibilidades:*

1. *φ tiene un punto fijo en \mathbb{H}^n .*

2. *φ no tiene puntos fijo en \mathbb{H}^n y exactamente un único punto fijo en infinito.*

3. *φ no tiene puntos fijos en \mathbb{H}^n y exactamente dos puntos fijos en infinito.*

Demostración.

Basta chequear que si φ no tiene puntos fijo en \mathbb{H}^n entonces tiene a lo sumo dos puntos en el infinito. Supongamos que nos encontramos en el modelo del semi-espacio y que φ que fija al 0 y ∞ y que no tiene puntos fijos en \mathbb{H}^n . Entonces podemos escribir φ como

$$(y, t) \mapsto \lambda(Ay, t)$$

Como $\varphi(0, 1) \neq (0, 1)$ tenemos que $\lambda \neq 1$, esto implica que φ solo fija 0 e ∞ . \square

Las isometrías que cumplen (1) las llamaremos elípticas, las que cumplen (2) las llamaremos parabólicas y las que cumplen (3) serán elípticas.

Fijemos F una cuasi-isometría, esta nos permite definir un mapa $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ como

$$\gamma(\infty) \mapsto (F \circ \gamma)(\infty)$$

Teorema 3.2.9. *Sea $F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una cuasi-isometría, entonces el mapa $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ asociado es un homeomorfismo.*

Para ver la biyectividad tomemos G una cuasi-isometría “inversa” y γ una geodésica, es claro que $\sup_t d(\gamma(t), G \circ F(\gamma(t))) < \infty$, de la definición de borde concluimos que $g \circ f = id$, de forma análoga se prueba que $f \circ g = id$. Para ver que es un homeomorfismo, como los espacios son compactos, basta ver que f es continua.

Lema 3.2.10. *Sean $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que la distancia esférica de $[\xi_1, \xi_2]$ es $\varepsilon > 0$. Consideremos la geodésica γ en \mathbb{H}^n tal que $\gamma(-\infty) = \xi_1$ y $\gamma(\infty) = \xi_2$, entonces el origen se encuentra a distancia $\sim -\log \varepsilon$ de γ .*

Demostración.

Tomando ε suficientemente chico, si denotamos y a la proyección ortogonal de 0 a γ , entonces $\|y\|_{euc}$ es aproximadamente $1 - \varepsilon/2$, utilizando la fórmula de la distancia vista en el capítulo 1 se sigue que:

$$d(0, y) \sim \log \left(\frac{2}{\varepsilon/2} \right) \sim -\log \varepsilon$$

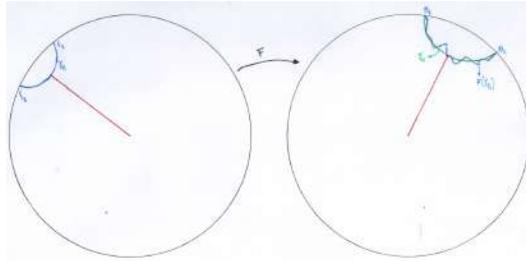
□

Proposición. 3.2.11. *El mapa $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ es localmente Hölder.*

Demostración.

Supongamos que nos encontramos en el modelo de la bola, a menos de tomar una isometría podemos suponer que $F(0) = 0$. Consideremos $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^{n-1}$ a distancia $\varepsilon > 0$ y γ_ε la geodésica que los une.

Se sigue que $F(\gamma_\varepsilon)$ es una cuasi-geodésica que une a $\theta_1 := f(\xi_1)$ con $\theta_2 := f(\xi_2)$ y sea δ la distancia esférica entre θ_1 y θ_2 . Consideremos γ_0 geodésica que une θ_1 con θ_2 , entonces se cumple que $d_H(F(\gamma_\varepsilon), \gamma_0) < K$, con K una constante uniforme.



Si λ y c son las constantes de la cuasi-isometría tenemos que

$$\lambda^{-1}d(0, \gamma_\varepsilon) - c \leq d(0, F(\gamma_\varepsilon)) \leq d(0, \gamma_0) + d_H(\gamma_0, F(\gamma_\varepsilon)) \iff \lambda^{-1}d(0, \gamma_\varepsilon) - c - K \leq d(0, \gamma_0)$$

Esto nos dice que si $\varepsilon \rightarrow 0$ entonces $d(0, \gamma_0) \rightarrow \infty$, esto nos dice que cuando ε tiende a 0 entonces δ tiende a 0, esto nos muestra que f es continua. Por el lema anterior sabemos que $d(0, \gamma_\varepsilon) \sim -\log \varepsilon$ y $d(0, \gamma_0) \sim -\log \delta$, se sigue entonces que $\delta < k_0 \varepsilon^{\lambda^{-1}}$. Donde k_0 es una constante. □

3.3. Horoesferas

Dado $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$, diremos que una hipercuerpo cerrada H en \mathbb{H}^n es una horoesfera centrada en ξ si H es ortogonal a todas las geodésicas que tienen a ξ como punto final. Es claro que esta definición es invariante por isometrías, dado que si H es una horoesfera centrada en ξ entonces si φ es una isometría, $\varphi(H)$ es una horoesfera de centro $\varphi(\xi)$.

Lema 3.3.1. *Para todo $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ vale que:*

\mathbb{H}^n es la unión disjunta de horoesferas centradas en ξ .

Demostración.

Sin pérdida de generalidad supongamos que nos encontramos en el modelo del semi-espacio y que $\xi = \infty$. Como las geodésicas con punto final ∞ son las rectas verticales $\{x_0\} \times \mathbb{R}^+$, entonces las horoesferas centradas en ∞ son los hiperplanos horizontales $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t_0\}$. \square

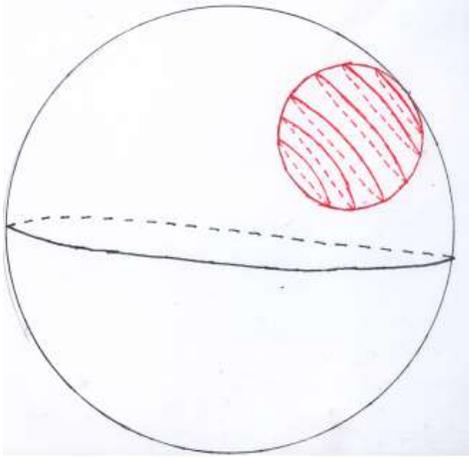


Figura 3.4: Horoesfera en el modelo de la Bola

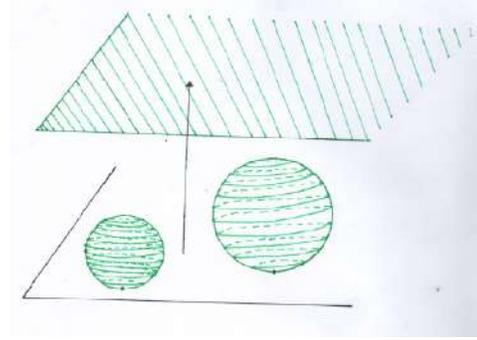


Figura 3.5: Horoesferas en el modelo del Semi-Espacio

Podemos deducir del lema anterior que las horoesferas centradas en ξ dividen \mathbb{H}^n en dos regiones conexas homeomorfas a la n -bola, a la componente que se encuentra con $\partial\mathbb{H}^n$ en ξ la llamaremos la horobola centrada en ξ .

Observación 3.3.2. *Las horoesferas heredan de la métrica de \mathbb{H}^n la estructura euclídea de \mathbb{R}^{n-1} .*

Para ver la observación supongamos nuevamente que nos encontramos en el semi-espacio, sabemos que dado $t_0 \in \mathbb{R}^+$ una horoesfera de centro ∞ es de la forma $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t_0\}$, en ese conjunto la métrica es un múltiplo de la métrica estándar dado que $g(u, v) = \frac{1}{t_0} \langle u, v \rangle_{\text{euc}}$.

Proposición 3.3.3. *Sea H una horoesfera, entonces su segunda forma fundamental asociada coincide con la métrica hiperbólica restringida a TH .*

Demostración.

Supongamos que $H = \mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$, en ese caso la métrica hiperbólica restringida a TH es la métrica

usual, por lo tanto las geodésicas son las rectas del hiperplano H . Por otro lado sabemos que si γ es una geodésica de la horoesfera, entonces $D_t \dot{\gamma} = II(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$. Por lo tanto basta ver que la curvatura geodésica de las rectas es 1 para concluir.

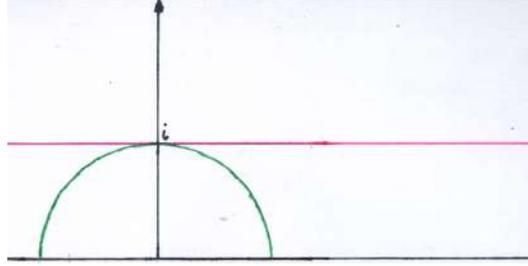


Figura 3.6: Horociclo y geodésica tangentes en i

Las rectas de H son horociclos por lo que basta estudiar la curvatura geodésica del horociclo centrado en ∞ que pasa por i en \mathbb{H}^2 . Como en H la métrica es euclídea y a nosotros nos interesa estudiar la curvatura en i podemos parametrizar por longitud de arco a la geodésica tangente como $\gamma(s) = \frac{\sinh s}{\cosh s} + i \frac{1}{\cosh s}$ y al horociclo como $\delta(s) = s + i$ y por lo tanto tomando el Taylor de la resta,

$$(\gamma - \delta)(s) = \left(\frac{\sinh s}{\cosh s} - s \right) + i \left(\frac{1}{\cosh s} - 1 \right) = O(s^3) + i \left(-\frac{s^2}{2} + O(s^3) \right)$$

Concluyendo que la curvatura geodésica del horociclo es 1. □

3.4. Funciones de Busemann

Dado un punto $x \in \mathbb{H}^n$ y $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ nos cuestionamos si existe una noción de ‘distancia’ entre estos dos puntos. Una idea posible podría ser tomar una sucesión de puntos $\{y_k\}_k$ de \mathbb{H}^n que converga a ξ y definir $d(x, \xi) := \lim_k d(x, y_k)$. El problema con este método es que en realidad ese límite diverge y esto no nos aporta ninguna información entre los puntos.

Una solución viable a este problema podría ser definir la distancia como

$$d(x, \xi) := \lim_k d(x, y_k) - d(y_0, y_k)$$

Lo que aporta este cambio es que el límite ahora está acotado por desigualdad triangular dado que

$$-d(x, y_0) \leq d(x, y_k) - d(y_0, y_k) \leq d(x, y_0),$$

además tenemos que a partir de un momento la sucesión real $d(x, y_k) - d(y_0, y_k)$ es monótona por lo tanto existe el límite. El problema con esta posible definición es que en principio depende de nuestra elección de y_0 y de la sucesión $\{y_k\}$, sin embargo, esto nos motiva a dar la siguiente definición.

Definición 3.4.1. Definimos la función de Busemann $B : \partial\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$B(\xi, x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - d(y, \gamma(t))$$

Donde γ es la geodésica que cumple que $\gamma(0) = y$ y $\gamma(\infty) = \xi$. Si tanto y como ξ se encuentran fijos entonces diremos que $B_\xi^y(x) := B(\xi, x, y)$ es la función de Busemann fijada en ξ normalizada en y .

Observación 3.4.2. En el caso que no nos interese el punto en que estamos normalizando vamos a suponer que es el 0 en el modelo de la bola y e_n en el modelo del semi-espacio, en esos caso además denotaremos a las funciones de Busemann como B_ξ y O al punto que normaliza.

El siguiente lema no solo nos muestra que las funciones de Busemann están bien definidas, sino que además existe una relación directa entre ellas y las horoesferas.

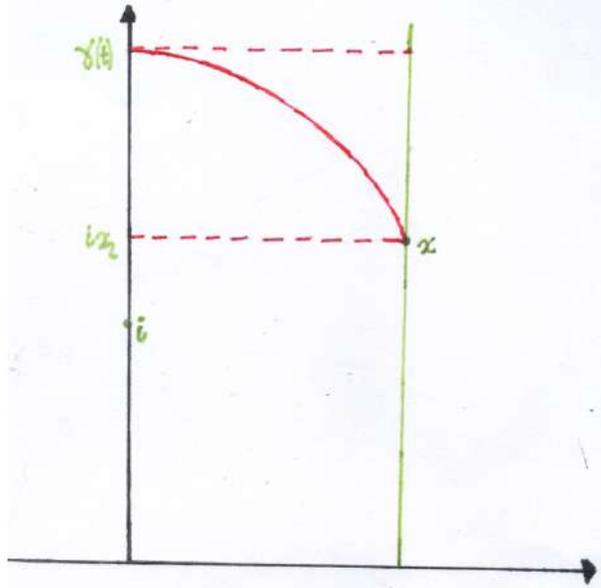
Lema 3.4.3. Consideremos $x, y \in \mathbb{H}^n$ y $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$. Sea H la horoesfera de centro ξ que pasa por y . Entonces $B_\xi(x, y) = \pm d(x, H)$ donde el signo es negativo si x se encuentra en la horobola y positivo si se encuentra fuera.

Demostración.

La prueba se dividirá en dos partes, primero veremos que las funciones de Busemann en caso de estar bien definidas son invariantes por isometría. Una vez que probemos esto, para probar la igualdad nos bastará probarlo en el semi-espacio tomando $\xi = \infty$. Veamos que son invariantes por isometrías:

$$B_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - d(y, \gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi x, \varphi \circ \gamma(t)) - d(\varphi y, \varphi \circ \gamma(t)) = B_{\varphi\xi}(\varphi x, \varphi y)$$

Aplicando la transitividad entonces podemos suponer que nos encontramos en el semi-espacio superior, que $\xi = \infty$ y que $y = e_n$, se sigue de la desigualdad triangular que si $x_n \geq 1$



$$d(\gamma(t), x) - d(\gamma(t), e_n) \leq d(\gamma(t), x_n e_n) + d(\gamma(t), \gamma(t) + x) - d(\gamma(t), e_n) = -d(x_n e_n, e_n) + O(t^{-1})$$

$$d(\gamma(t), x) - d(\gamma(t), e_n) \geq d(\gamma(t), x_n e_n) - d(\gamma(t), \gamma(t) + x) - d(c(t), e_n) = -d(x_n e_n, e_n) - O(t^{-1})$$

Tomando límite en t podemos concluir que $B_\infty(x) = -d(x_n e_n, e_n) = -d(x, H)$ donde H es la horoesfera centrada en ∞ que pasa por e_n . El caso en que $x_n < 1$ es de razonamiento análogo, aunque en ese caso $B_\infty(x) = d(x_n e_n, e_n) = d(x, H)$. \square

Corolario. 3.4.4. B_ξ es suave. Además $\nabla B_\xi(x)$ es el vector unitario en $T_x \mathbb{H}^n$ paralelo a la dirección de ξ .

Demostración.

Sin pérdida de generalidad supongamos que nos encontramos en el modelo del semi-espacio, que $\xi = \infty$ y que $y = e_n$. Entonces por el lema anterior sabemos que

$$B_\infty(x) = \begin{cases} -d(x_n e_n, e_n) & \text{si } x_n \geq 1 \\ d(x_n e_n, e_n) & \text{si } x_n < 1 \end{cases}$$

Utilizando la parametrización $\gamma(t) = e^{\log(x_n)t} e_n$ del segmento geodésico $[e_n, x_n e_n]$ tenemos que $B_\infty(x) = -\log(x_n)$, esto en particular nos demuestra que es suave.

Para lo que resta consideremos $\alpha : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{H}^n$ curva suave tal que $\alpha(0) = x$ y $\dot{\alpha}(0) = v$, entonces

$$\begin{aligned} D_x B_\xi(v) &= (B_\xi \circ \alpha)'(t)|_{t=0} = (-\log(\alpha_n(t)))'|_{t=0} = \left(-\frac{\alpha_n'(t)}{\alpha_n(t)} \right) |_{t=0} = -\frac{v_n}{x_n} = \langle -x_n e_n, v \rangle \\ &\implies \nabla B_\xi = -x_n e_n \end{aligned}$$

□

Este corolario en particular nos servirá para hallar explícitamente el hessiano de las funciones de Busemann y probar que son convexas.

Proposición. 3.4.5. $\text{Hess}_x(B_\xi)(u, v) = \langle u, v \rangle - \langle \nabla B_\xi(x), u \rangle \langle \nabla B_\xi(x), v \rangle$

Demostración.

Como el hessiano es una forma bilineal y $T_x \mathbb{H}^n = \nabla B_\xi(x) \oplus T_x B_\xi$, basta probar la igualdad para cada subespacio por separado.

Recordemos que $\text{Hess}_x(B_\xi)(u, v) = g(\nabla_u \nabla B_\xi(x), v)$, por lo que tomando $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ geodésica que cumple $\gamma(0) = x$ y $\dot{\gamma}(0) = \nabla B_\xi(x)$ tenemos por definición que $D_{\nabla B_\xi(x)} \nabla B_\xi(x) = D_{\gamma'(0)} \gamma'(0) = 0$ y por lo tanto

$$\text{Hess}_x(B_\xi)(\nabla B_\xi(x), \nabla B_\xi(x)) = \langle D_{\nabla B_\xi(x)} \nabla B_\xi(x), \nabla B_\xi(x) \rangle = 0$$

Por ser el Hessiano simétrico, la misma cuenta vale en el caso que uno de los vectores sea $\nabla B_\xi(x)$ y el otro genérico.

Estudiemos ahora el caso en que $u, v \in T_x B_\xi$, por la proposición 2.2.5. tenemos que si H es la horoesfera centrada en ξ que pasa por x entonces

$$\text{Hess}_x(B_\xi|_H) = \text{Hess}_x(B_\xi)|_{TH} - D_x B_\xi(\nu)\ell$$

Recordar que H es una hipersuperficie de nivel de B_ξ por lo que $\text{Hess}_x(B_\xi|_H) = 0$, además $\nu = \nabla B_\xi(x)$ por lo que $D_x B_\xi(\nu) = \langle \nu, \nu \rangle = 1$ y $\text{Hess}_x(B_\xi) = \ell$. Por el lema 2.3.3. sabemos que la segunda forma fundamental coincide con la métrica hiperbólica restringida a $T_x H$, en otras palabras

$$\text{Hess}_x(B_\xi)(u, v) = \langle u, v \rangle \quad \text{si } u, v \in T_x H$$

□

Corolario. 3.4.6. $\text{Hess}_x(B_\xi)(u, u) \geq 0$ con igualdad si y solo si u es paralelo a $\nabla B_\xi(x)$. En particular B_ξ es una función convexa.

Capítulo 4

Extensión Baricéntrica

Consideremos $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ un homeomorfismo, nuestro objetivo en este capítulo es construir un mapa diferenciable $F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ que decrezca volumen, en otras palabras que cumpla que $|\text{Jac}(f)| \leq 1$, a partir del homeomorfismo. En la primera sección trabajaremos con una familia de medidas en $\partial\mathbb{H}^n$ $\{\mu_x\}_{x \in \mathbb{H}^n}$ que llamaremos medidas de visibilidad y en la segunda introduciremos la noción de baricentro asignado a una medida ν en $\partial\mathbb{H}^n$ que denotaremos $\text{bar } \nu$, veremos que bajo ciertas condiciones existe y es único. Finalmente en las últimas dos secciones construiremos nuestra función F , que llamaremos *extensión baricéntrica*, a través del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mu_x \in \mathcal{P}(\partial\mathbb{H}^n) & \xrightarrow{f} & f_*[\mu_x] \in \mathcal{P}(\partial\mathbb{H}^n) \\ \uparrow & & \downarrow \\ x \in \mathbb{H}^n & & \text{bar}(f_*[\mu_x]) \in \mathbb{H}^n \end{array}$$

En otras palabras definiremos $F(x) = \text{bar}(f_*[\mu_x])$ y veremos que cumple las condiciones que nos interesan. En este capítulo nos basaremos de [3], [6], [10] y [14].

4.1. Medidas de Visibilidad

En el Capítulo 3 vimos que existía una identificación canónica entre la esfera y $\partial\mathbb{H}^n$ cuando el modelo es el de la bola de Poincaré, esto en particular nos da una identificación canónica entre $T_0^1\mathbb{H}^n$ y $\partial\mathbb{H}^n$, con esto podemos deducir que si consideramos la medida de Lebesgue en $T_0^1\mathbb{H}^n$, que denotaremos Leb_0 , entonces la medida inducida por el mapa también será la medida de Lebesgue pero en el borde de la bola. No obstante, podemos pensar a esta medida de la siguiente forma:

La medida de un subconjunto A de $\partial\mathbb{H}^n$ es la medida de Lebesgue del subconjunto

$$\hat{A} = \{v \in T_0\mathbb{H}^n : \exists \gamma \text{ geodésica que cumple que } \gamma(0) = 0, \dot{\gamma}(0) = v \text{ y } \gamma(\infty) \in A\}$$

Lo importante de esta última observación es que este razonamiento es generalizable para otros puntos del espacio hiperbólico. Dado $x \in \mathbb{H}^n$ definimos el *mapa de visibilidad* $V_x : T_x^1\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ como

$$V_x(v) = \gamma(\infty) \quad \text{donde } \gamma \text{ cumple que } \gamma(0) = x \text{ y } \dot{\gamma}(0) = v$$

Por unicidad de las geodésicas tenemos que estos mapas son una biyección y además son continuos,

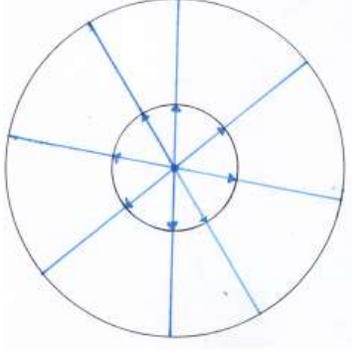


Figura 4.1: Mapa de Visibilidad del punto 0 en la Bola

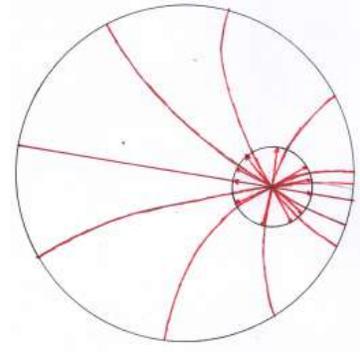
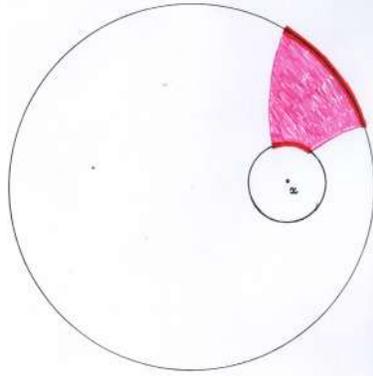


Figura 4.2: Mapa de Visibilidad de un punto x en la Bola

como los espacios son compactos entonces son homeomorfismos. Sin embargo, posteriormente veremos que en realidad estos son difeomorfismos. A partir de estas funciones podemos definir las medidas de visibilidad de la siguiente forma:

Definición 4.1.1. Dado $x \in \mathbb{H}^n$ definimos la medida de visibilidad asociada a x como $\mu_x := (V_x)_* [Leb_x]$, donde Leb_x es la medida de Lebesgue normalizada en $T_x^1 \mathbb{H}^n$.



En el siguiente lema veremos que esta familia de medidas cumplen una relación de equivariancia, es más, de la demostración será claro que las funciones de visibilidad son difeomorfismos.

Lema 4.1.2. Dados $x \in \mathbb{H}^n$ y $\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ se cumple que $\mu_{\varphi x} = \varphi_* [\mu_x]$.

Demostración.

Como φ es una isometría, por definición tenemos que $g_{\gamma x}(v, w) = g_x(D\varphi_{\varphi x}^{-1}(v), D\varphi_{\varphi x}^{-1}(w))$. Por lo tanto tenemos que $D\varphi_{\varphi x}^{-1} : T_{\varphi x}^1 \mathbb{H}^n \rightarrow T_x^1 \mathbb{H}^n$ es una isometría y $(D\varphi_{\varphi x}^{-1})_* [Leb_{\varphi x}] = Leb_x$.

Sea $v \in T_{\gamma x}^1 \mathbb{H}^n$, definimos $w := D\gamma_{\gamma x}^{-1}(v)$. Sabemos que $V_x(w) = [c]$ donde $c(0) = x$ y $c'(0) = w$, se sigue que como $\gamma \circ c(0) = \gamma x$ y $(\gamma \circ c)'(0) = v$ y las geodésicas son únicas que V_x es un difeomorfismo dado que γ actúa como una función conforme en $\partial \mathbb{H}^n$ y que

$$V_{\gamma x} = \gamma \circ V_x \circ D\gamma_x \gamma^{-1}$$

De la siguiente operación concluimos la prueba del lema:

$$\mu_{\gamma x} = (V_{\gamma x})_* [Leb] = (\gamma \circ V_x \circ D_{\gamma x} \gamma^{-1})_* [Leb] = \gamma_* (V_x)_* (D_{\gamma x} \gamma^{-1})_* [Leb] = \gamma_* [\mu_x]$$

□

Del hecho que las V_x son difeomorfismos tenemos que las μ_x son absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue, en particular tenemos que existe la derivada de Radon-Nikodym (también llamada función densidad) $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}$.

Proposición. 4.1.3. Sean $x, y \in \mathbb{H}^n$, $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ y $\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, entonces

$$\frac{d\mu_{\varphi x}}{d\mu_{\varphi y}}(\varphi\xi) = \frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi)$$

Demostración.

Sea $\{\mu_y\}_{y \in \mathbb{H}^n}$ la familia de medidas de visibilidad. Definimos $k(x, y, \xi) := \frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi)$. Queremos ver que $k(x, z, \xi) = k(\varphi x, \varphi z, \varphi\xi)$ para toda φ isometría. Vimos que $\varphi_*\mu_y = \mu_{\varphi y}$, entonces:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\xi) k(\varphi x, \varphi y, \gamma\xi) d\mu_x(\xi) \stackrel{\varphi\xi = \eta}{=} \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\varphi^{-1}\eta) k(\varphi x, \varphi y, \eta) d\varphi_*[\mu_x](\eta) \\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\varphi^{-1}\eta) k(\varphi x, \varphi y, \eta) d\mu_{\varphi(\eta)} = \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\varphi^{-1}\eta) d\mu_{\varphi y}(\eta) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\varphi^{-1}\eta) d(\varphi_*\mu_y(\eta)) \\ &= \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\xi) d\mu_y(\xi) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} f(\xi) k(x, y, \xi) d\mu_x(\xi) \end{aligned}$$

□

Proposición. 4.1.4. Dados $x, y \in \mathbb{H}^n$ y $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$ vale

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-(n-1)B_\xi(x,y)}$$

Demostración.

Supongamos que nos encontramos en el semi-espacio, que $\xi = \infty$ y que e_n , por el teorema de diferenciación de Lebesgue sabemos que

$$\frac{d\mu_x}{d\mu_{e_n}}(\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\mu_x(B(0, R)^c)}{\mu_{e_n}(B(0, R)^c)}$$

Estudiemos en primer lugar el caso $n = 2$, supongamos que $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$, sea $z = a + ib \in \mathbb{H}^2$, la idea es aproximar

$$\mu_z(B(0, R)) = \mu_z((-\infty, -R]) + \mu_z([R, +\infty))$$

Tomemos $R \gg a$, veamos el caso $\theta := \mu_z([R, +\infty))$, el otro caso es de razonamiento equivale. Sea C la geodésica que sale de z y pasa por R , como vimos antes C es la semi-circunferencia ortogonal a \mathbb{R} , esto en particular nos dice que el centro k se encuentra en \mathbb{R} . Llamemos $\theta := \mu_z([R, +\infty))$, por ser μ_z una medida sin átomos se sigue que cuando R va a infinito θ tiende a 0. Además se tiene que $k \asymp R/2$, aplicando trigonometría y utilizando que $\sin \theta \simeq \theta$ tenemos

$$\mu_z([0, \infty)) = \theta \asymp b \cdot 2/R \implies \frac{d\mu_z}{d\mu_i}(\infty) = b$$

Para el caso general tomemos $z = (x, t)$, aplicando el razonamiento de la parte anterior y las coordenadas esféricas se sigue que $\mu_z(B(0, R)^c) \asymp t^{n-1} (2/R)^{n-1}$.

□

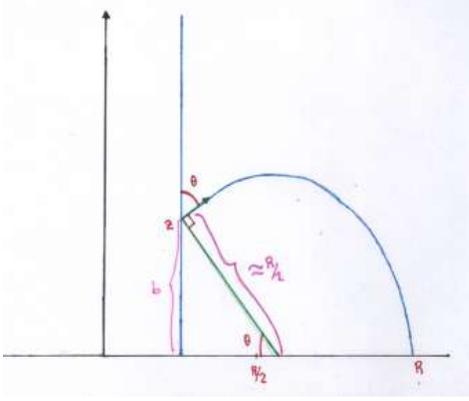


Figura 4.3: Caso $n = 2$

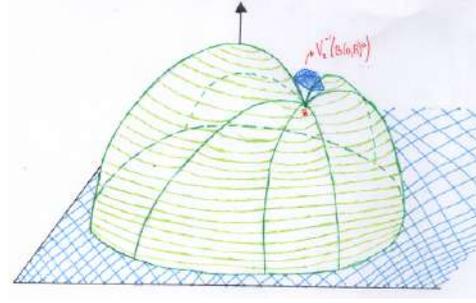


Figura 4.4: Caso $n = 3$

4.2. Baricentro

En la sección anterior vimos que dado un punto $x \in \mathbb{H}^n$ le podíamos asignar una medida en el borde μ_x que llamamos medida de visibilidad. Ahora estudiaremos el proceso inverso, es decir, dada una medida ν en $\partial\mathbb{H}^n$ buscaremos una forma de asignarle un punto del espacio hiperbólico. Para eso introducimos la función $\beta_\nu : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\beta_\nu(x) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} B_\xi(x) d\nu(\xi)$$

Intuitivamente la función β_ν evaluada en un $x \in \mathbb{H}^n$ es el promedio de las “distancias” entre x y los puntos del borde $\partial\mathbb{H}^n$. Diremos que un punto $y \in \mathbb{H}^n$ es el baricentro con respecto a la medida ν , que en muchos casos lo denotaremos $\text{bar}(\nu)$, si

$$\beta_\nu(y) = \min_{x \in \mathbb{H}^n} \beta_\nu(x)$$

Nuestro interés en el transcurso de esta sección es tanto probar la existencia y unicidad del baricentro en medidas no atómicas como ver que es equivariante con respecto a las isometrías.

Observación 4.2.1. *Es importante remarcar que el baricentro no depende del punto por el que se normalice la función de Busemann, para ver esto sean $x, y, z \in \mathbb{H}^n$, $\xi \in \partial\mathbb{H}^n$. Si y y z se encuentran en la misma horoesfera entonces $B_\xi(x, y) = B_\xi(x, z)$. En caso contrario entonces por el mismo razonamiento podemos suponer que tanto y como z se encuentran en la misma geodésica c que va a ξ , se sigue que*

$$B_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - d(y, \gamma(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} d(x, \gamma(t)) - d(z, \gamma(t)) + d(z, \gamma(t)) - d(y, \gamma(t)) = B_\xi(x, z) + k$$

Con $k = \pm d(z, y)$, donde el signo depende en que z se encuentre dentro de la horobola de y o viceversa. Como ν es una medida de probabilidad en particular tenemos que β_ν está bien definida a menos de una constante y por lo tanto el mínimo no depende del punto a normalizar.

Del hecho que las funciones de Busemann son convexas se sigue que las β_ν también lo son, la siguiente proposición nos aporta aún más información.

Proposición. 4.2.2. Sea $\nu \in \mathcal{P}(\partial\mathbb{H}^n)$ entonces el hessiano de β_ν está dado por

$$\text{Hess}_x(\beta_\nu)(u, u) = g(u, u) - \int_{\partial\mathbb{H}^n} g(\nabla B_\xi(x), u)^2 d\nu(\xi)$$

En particular, si ν no tiene átomos entonces β_ν es estrictamente convexa.

Demostración.

Sea $u \in T_x\mathbb{H}^n$ distinto de 0. Por la proposición 3.4.5. sabemos que $\text{Hess}_x(B_\xi)(u, u) \geq 0$, se sigue que

$$\text{Hess}_x(\beta_\nu)(u, u) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \text{Hess}_x(B_\xi)(u, u) d\nu(\xi) \geq 0$$

Supongamos que $\text{Hess}_x(\beta_\nu) = 0$, entonces utilizando que el mapa $\xi \mapsto \text{Hess}_x B_\xi(u, u)$ es no negativo y la proposición 3.4.5 se sigue que para casi todo ξ se cumple

$$\text{Hess}_x B_\xi(u, u) d\nu(\xi) = 0 \iff g(u, u) = g(\nabla B_\xi(x), u)^2 = 0 \iff \nabla B_\xi(x) \text{ y } u \text{ son colineales}$$

Esto último es imposible dado que ν no es una medida atómica, por lo tanto en ese caso la desigualdad de la proposición es estricta y β_ν es estrictamente convexa. \square

Con esto ya estamos en condiciones de probar que la existencia y unicidad del baricentro para medidas no atómicas, pero antes de ver la demostración veamos por que es importante pedir que no tengan átomos.

Ejemplo 4.2.3. Supongamos que nos encontramos en el semi-espacio superior y $\nu := \delta_\infty$, entonces

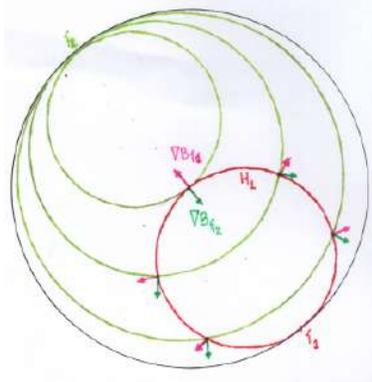
$$\beta_\nu(x) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} B_\xi(x) d\nu(\xi) = B_\infty(x) = -\log(x_n)$$

Se sigue que si $x_n \rightarrow \infty$ entonces $B_\infty(x) \rightarrow -\infty$, en particular no tiene mínimo y por lo tanto no está definido el baricentro.

Ejemplo 4.2.4. Consideremos $\xi_1, \xi_2 \in \partial\mathbb{H}^n$ y $\nu = p \delta_{\xi_1} + q \delta_{\xi_2}$ donde $p + q = 1$, entonces

$$\beta_\nu(x) = p B_{\xi_1}(x) + q B_{\xi_2}(x)$$

Sea γ la geodésica que va de ξ_1 a ξ_2 y sea H_1 una horoesfera centrada en ξ_1 . Nos interesa ver donde ocurre el mínimo de B_{ξ_2} en H_1 , como vemos en la figura y por multiplicadores de Lagrange el mínimo ocurre cuando los gradientes son colineales, esto último como podemos notar es cuando el punto de H_1 se encuentra en la imagen de la geodésica γ .



Dado $x_0 \in \text{im}\gamma$, parametrizémoslo de tal forma que $\gamma(0) = x_0$. De eso se sigue que $\beta_\nu(\gamma(t)) = -pt + qt$, observar que si $p = q$ entonces el mínimo global existe, es 0 y vale en toda la geodésica. Por otro lado si $p > q$ se sigue que $\beta_\nu(\gamma(t)) \rightarrow -\infty$ cuando t tiende a ∞ .

Proposición. 4.2.5. Si ν es una medida de probabilidad no atómica, entonces existe $\text{bar}(\nu)$ y es único.

Demostración.

Como ν no tiene átomos, por la proposición anterior sabemos que β_ν es estrictamente convexa, esto nos dice que en caso de existir mínimo este es único. Para probar la existencia la idea será probar que si nos acercamos al borde entonces nos vamos a ∞ , de ahí se sigue que el mínimo se alcanza en \mathbb{H}^n . Primero afirmamos que esto es equivalente a ver que si nos movemos a través de toda geodésica que va de O a $\partial\mathbb{H}^n$ nos vamos a ∞ . Para ver esto supongamos que existe una sucesión $y_k \in \mathbb{H}^n$ que tiende a $b \in \partial\mathbb{H}^n$ tal que $\beta_\nu(y_k) \leq a$ con $a > 0$. Definimos el conjunto $C_a = \{y \in \mathbb{H}^n : \beta_\nu(y) \leq a\}$, observar que este conjunto es convexo. Se sigue que si tomamos la geodésica γ_n de y_0 a y_n entonces para todo t se cumple que $\beta_\nu(\gamma(t)) \leq a$, pero esto sería absurdo dado asumimos que para toda geodésica β_ν tiende a infinito.

Para $x \in \mathbb{H}^n$ definimos $J(x) := \{\theta \in \partial\mathbb{H}^n : B_\theta(x) \leq 0\}$. Geométricamente esto es, $\theta \in J(x)$ si y solo si se encuentra dentro de la horobola de centro θ que pasa por O . Supongamos que $\gamma : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$ es una geodésica de O a $\theta_0 \in \mathbb{H}^n$. Sea $t_0 \in [0, \infty)$ tal que si $x_0 = \gamma(t_0)$ entonces $\partial\mathbb{H}^n \setminus J(x_0)$ es un conjunto de medida positiva. Tomemos K un subconjunto compacto de $\partial\mathbb{H}^n \setminus J(x_0)$ de medida no nula.

Por la convexidad de las funciones de Busemann tenemos que

$$B_\theta(x_0) \leq \frac{B_\theta(x)}{d(x, O)} d(x_0, O) \quad \text{con } x = \gamma(t)$$

Es más, como $t > t_0$, $J(x) \subset J(x_0)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} \beta_\nu(x) &= \int_{J(x)} B_\theta(x) d\nu(\theta) + \int_{J(x)^c} B_\theta(x) d\nu(\theta) \geq \int_{J(x)} B_\theta(x) d\nu(\theta) + \int_K B_\theta(x) B_\theta(x) d\nu(\theta) \\ &\geq \frac{d(O, x)}{d(O, x_0)} \int_{J(x)} B_\theta(x_0) + \frac{d(O, x)}{d(O, x_0)} \int_K B_\theta(x_0) d\nu(\theta) \geq \\ &\frac{d(O, x)}{d(O, x_0)} \left[\min_{\theta \in \partial\mathbb{H}^n} \{B_\theta(x_0)\} \nu(J(x)) + \min_{\theta \in K} \{B_\theta(x_0)\} \nu(K) \right] \end{aligned}$$

Observar que en la última expresión el término dependiente de x es negativo mientras que el otro es un término constante positivo, además cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que $\bigcap_{t \geq t_0} J(x(t)) = \{\theta_0\}$. Como ν no tiene átomos entonces $\nu(J(x(t))) \rightarrow \nu(\{\theta_0\}) = 0$, concluyendo que $\beta_\nu(x(t)) \rightarrow \infty$. \square

En el siguiente lema además veremos que cumple una relación de equivariancia con respecto a las isometrías.

Lema 4.2.6. Sea $\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$, entonces $\varphi(\text{bar}(\nu)) = \text{bar}(\varphi_*[\nu])$.

Demostración.

Definimos $y := \text{bar}(\nu)$ y $x := \varphi(y)$, en particular el baricentro es el único punto crítico, por lo tanto

$$0 = \int_{\partial\mathbb{H}^n} D_y B_\theta(\cdot) d\nu(\theta) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} D_x B_{\varphi(\theta)}(D_y \varphi(\cdot)) d\nu(\theta) = \left(\int_{\partial\mathbb{H}^n} D_x B_\theta(\cdot) d\varphi_*[\nu](\theta) \right) \circ D_y \varphi$$

Al ser $D_y\varphi$ invertible se sigue que

$$\int_{\partial\mathbb{H}^n} D_x B_\theta(\cdot) d\varphi_*[\nu](\theta) = 0$$

y por unicidad del baricentro tenemos que $x = \text{bar}(\varphi_*[\nu])$. \square

Con todo esto estamos en condiciones de probar que el baricentro de una medida de visibilidad μ_x es el mismo punto x .

Proposición. 4.2.7. $\text{bar}(\mu_x) = x$

Demostración.

Por el lema anterior basta probarlo en el caso que nuestro modelo sea el de la bola de Poincaré y $x = 0$. Sea $y := \text{bar}(\mu_0)$, consideremos R_θ una rotación con centro 0, por el lema 4.1.2. sabemos que $R_\theta[\mu_0] = \mu_{R_\theta 0} = \mu_0$.

Aplicando lo que acabamos de ver y el lema anterior se sigue

$$R_\theta(y) = \text{bar}((R_\theta)_*[\mu_0]) = \text{bar}(\mu_0) = y$$

Como el único punto fijo de R_θ es el 0 concluimos que este es el baricentro. \square

4.3. El Mapa Natural

Con lo que vimos hasta ahora estamos en condiciones de definir el mapa que mencionamos al principio del capítulo asociado al homeomorfismo $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ como

$$F(x) := \text{bar}(f_*[\mu_x])$$

Como la probabilidad $f_*[\mu_x]$ es no atómica, por la proposición 4.2.3. este mapa está bien definido. Por otro lado, observar que si consideramos $f = id$, entonces por la proposición 4.2.7. F es la identidad en el espacio hiperbólico.

Es importante remarcar que si bien utilizamos el término extensión baricéntrica para F , con la información que tenemos no podemos asegurar la inyectividad o sobreyectividad. No obstante, como veremos en el capítulo 5 bajo hipótesis extras vamos a poder asegurar biyectividad.

En lo que resta del capítulo nos enfocaremos en probar el Teorema 2, recordémoslo.

Teorema 2. *Sea $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$ un homeomorfismo y F su extensión baricéntrica, entonces F es una función suave. Si la dimensión n es mayor o igual a 3 entonces*

$$|\text{Jac}_x F| := \sqrt{|\det((D_x F)^* D_x F)|} \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{H}^n$$

Además si para algún x vale la igualdad entonces $D_x F : T_x \mathbb{H}^n \rightarrow T_{F(x)} \mathbb{H}^n$ es una isometría.

Para una medida de probabilidad no atómica ν se cumple que el baricentro es el mínimo de β_ν , esto implica que si $z := \text{bar}(\nu)$ es el baricentro entonces es el único punto crítico de β_ν , es decir,

$$0(\cdot) = D_z \beta_\nu(\cdot) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} D_z B_\xi(\cdot) d\nu(\xi)$$

En particular, si tomamos las medidas $f_*[\mu_x]$ entonces la ecuación anterior nos queda

$$0(\cdot) = D_{F(x)}\beta_{f_*[\mu_x]}(\cdot) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} D_{F(x)}B_\theta(\cdot) df_*[\mu_x](\theta) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} D_{F(x)}B_{f(\xi)}(\cdot) d\mu_x(\xi) \quad (4.1)$$

Esta última ecuación nos motiva a definir la función $\beta : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\beta(x, y) = \beta_x(y) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} B_{f(\xi)}(y) d\mu_x(\xi)$$

Con esto último la ecuación (4.1) se traduce como

$$0(\cdot) = D_{F(x)}\beta_x(\cdot) \quad (4.2)$$

Para probar la suavidad de F , como cumple una ecuación implícita, nos bastaría ver que nos encontramos en las hipótesis del teorema de la función implícita.

El potencial problema que estamos manejando es que la ecuación (4.2) viene del mapa

$$(x, y) \mapsto D_y\beta_x$$

En otras palabras, el codominio es una sección del espacio cotangente de \mathbb{H}^n , por ende, para simplificar el problema fijemos $x_0 \in \mathbb{H}^n$, $y_0 := F(x_0)$ y $\{E_1(y_0), \dots, E_n(y_0)\}$ una base ortonormal de $T_{y_0}\mathbb{H}^n$. Se sigue que dado $y \in \mathbb{H}^n$ podemos considerar la base ortonormal dada por el transporte paralelo ¹ en la geodésica que une y_0 con y .

A partir de lo anterior podemos definir la función $G : \mathbb{H}^n \times \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con funciones coordenadas

$$G_i(x, y) = \langle \nabla_y \beta(x, y), E_i(x) \rangle = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \langle \nabla B_\xi(y), E_i(y) \rangle df_*[\mu_x](\xi)$$

Por lo tanto la ecuación (4.2) es equivalente a $G(x, F(x)) = 0$. Por ser G una función de “dos variables” denotaremos $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)$ a los diferenciales de G con respecto a las variables x e y respectivamente.

Lema 4.3.1. *El mapa $y \mapsto G(x, y)$ tiene diferencial invertible en $F(x)$ para todo $x \in \mathbb{H}^n$.*

Demostración.

Recordemos que $\frac{d\mu_x}{d\mu_O}(\xi) = e^{-(n-1)B_\xi(x)}$, entonces la suavidad de G es clara dado que

$$G_i(x, y) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \langle \nabla B_{f(\xi)}(y), E_i(y) \rangle d\mu_x(\xi) = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \langle \nabla B_{f(\xi)}(y), E_i(y) \rangle e^{-(n-1)B_\xi(x)} d\mu_O(\xi) \quad (4.3)$$

Sin pérdida de generalidad probemos el lema para x_0 e y_0 . Sean $\varepsilon > 0$, $v \in T_{y_0}\mathbb{H}^n$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{H}^n$ un segmento geodésico que cumple que $\gamma(0) = y_0$ y $\dot{\gamma}(0) = v$. Utilizando que y_0 es un punto crítico de β_{x_0} se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial y}(x_0, y_0)(v) &= \frac{d}{dt} G_i(x_0, \gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \langle \nabla \beta_{x_0}(\gamma(t)), E_i(\gamma(t)) \rangle |_{t=0} \\ &= \langle D_v \nabla \beta_{x_0}(y_0), E_i(y_0) \rangle + \langle \nabla \beta_{x_0}(y_0), D_v E_i(y_0) \rangle = \text{Hess}_{y_0}(\beta_{x_0})(v, E_i(y_0)) \end{aligned}$$

Como $\text{Hess}_{y_0}(\beta_{x_0})$ es definida positiva concluimos que para todo $v \in T_{y_0}\mathbb{H}^n$ y que para algún i se cumple

$$\frac{\partial G_i}{\partial y}(x_0, y_0)(v) \neq 0$$

Esto implica que $\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0)(v)$ no es nulo como vector de \mathbb{R}^n . □

¹Ver el Lee para definición

Con esto concluimos que F efectivamente es una función suave. Es más, el teorema de la función implícita nos aporta la siguiente ecuación

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, F(x)) \circ D_x F = -\frac{\partial G}{\partial x}(x, F(x)) \quad (4.4)$$

Derivando con respecto la variable x la ecuación (4.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial x}(x, y) &= -(n-1) \int_{\partial \mathbb{H}^n} D_y B_{f(\xi)}(E_i(y)) D_x B_\xi e^{-(n-1)B_\xi(x)} d\mu_O(\xi) \\ &= -(n-1) \int_{\partial \mathbb{H}^n} D_y B_{f(\xi)}(E_i(y)) D_x B_\xi d\mu_x(\xi) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Por otro lado, utilizando que $\text{Hess}_y B_\theta(u, v) = \langle u, v \rangle - \langle \nabla B_\theta(y), u \rangle \langle \nabla B_\theta(y), v \rangle$, que por transporte paralelo vale $D_{\dot{\gamma}(t)} E_i(t) = 0$ y que nuestra medida es de probabilidad obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial y}(x, y)(v) &= \int_{\partial \mathbb{H}^n} \text{Hess}_y B_{f(\xi)}(E_i(y), v) d\mu_x(\xi) \\ &= \langle E_i(y), v \rangle - \int_{\partial \mathbb{H}^n} \langle \nabla B_{f(\xi)}, E_i(y) \rangle \langle \nabla B_{f(\xi)}, v \rangle d\mu_x(\xi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para simplificar notación introducimos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} \phi : T_x \mathbb{H}^n &\rightarrow L^2(\partial \mathbb{H}^n, \mu_x) & \psi : T_{F(x)} \mathbb{H}^n &\rightarrow L^2(\partial \mathbb{H}^n, \mu_x) \\ v &\longmapsto (\xi \mapsto \sqrt{n} D_x B_\xi(v)) & u &\longmapsto (\xi \mapsto \sqrt{n} D_{F(x)} B_\xi(u)) \end{aligned}$$

Evaluando G en $(x, F(x))$ e incorporando las notaciones, las ecuaciones (4.5) y (4.6) nos quedan

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_i}{\partial x}(x, F(x))(u) &= -\frac{n-1}{n} \langle \psi(E_i(F(x))), \phi(u) \rangle_{L^2} \\ \frac{\partial G_i}{\partial y}(x, F(x))(v) &= \langle E_i(F(x)), v \rangle - \frac{1}{n} \langle \psi(E_i(F(x))), \psi(v) \rangle_{L^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (4.4) nos queda

$$\langle E_i(F(x)), D_x F(u) \rangle - \frac{1}{n} \langle \psi(E_i(F(x))), \psi(D_x F(u)) \rangle_{L^2} = \frac{n-1}{n} \langle \psi(E_i(F(x))), \phi(u) \rangle_{L^2}$$

Tomando los adjuntos (ver Lema 4.4.1.) y las propiedades de la métrica tenemos

$$\left\langle E_i(F(x)), \left(I - \frac{1}{n} \psi^* \psi \right) \circ D_x F(u) \right\rangle = \left\langle E_i(F(x)), \frac{n-1}{n} \psi^* \phi(u) \right\rangle$$

Como estas igualdades valen para todo E_i , se sigue que

$$\left(I - \frac{1}{n} \psi^* \psi \right) \circ D_x F = \frac{n-1}{n} \psi^* \phi \quad (4.7)$$

Dados dos operadores autoadjuntos A y B , diremos que $A \leq B$ si la forma cuadrática $B - A$ es semidefinida positiva. Se cumple que si $A \leq B$ entonces $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$. Si además A es definida positiva entonces $\det(A) \leq \det(B)$ (ver Lema 4.4.2.).

Para concluir que $|\text{Jac } f| \leq 1$ utilizaremos la ecuación (4.7). Definimos $H := \frac{1}{n} \psi^* \psi$, no es difícil ver que se cumple que H es definida positiva y que $\text{tr}(H) = 1$ (ver Lema 4.4.3.), se sigue que los valores

proprios de H caen en $(0, 1)$ y por lo tanto $I - H$ también es definida positiva. Utilizando que ϕ es un encaje isométrico y que $\phi\phi^* \leq I$ (ver Lema 4.4.4.) tenemos que

$$\frac{n}{(n-1)^2} D_x F (D_x F)^* = \frac{1}{n} (I - H)^{-1} \psi^* \phi \phi^* \psi (I - H)^{-1} \leq (I - H)^{-1} H (I - H)^{-1}$$

Si $n \geq 3$, entonces se cumple la siguiente desigualdad

$$\frac{\det(H)}{\det(I - H)^2} \leq \left(\frac{n}{(n-1)^2} \right)^n$$

Siendo $H = \frac{1}{n}$ la única matriz que satisface la igualdad (ver lema 4.4.5.). Si $D_x F$ no fuese invertible entonces $|\text{Jac}_x F| = 0$ y no hay nada que probar. Supongamos entonces que $D_x F$ es invertible, esto implica que $D_x F (D_x F)^*$ es definida positiva, aplicando la desigualdad que mencionamos se sigue que

$$|\text{Jac}_x(F)| = \sqrt{\det(D_x F (D_x F)^*)} \leq \sqrt{\det((I - H)^{-1} H (I - H)^{-1})} \leq \sqrt{\left(\frac{(n-1)^2}{n} \right)^n \left(\frac{n}{(n-1)^2} \right)^n} = 1$$

Sea $x \in \mathbb{H}^n$ tal que la igualdad se cumple, entonces sabemos que $H = \frac{1}{n}I$ y $(I - H)^{-1} = \frac{n}{n-1}I$. Como H es una matriz simétrica definida positiva entonces se tiene que $\det(H) \leq \left(\frac{\text{tr}(H)}{n} \right)^n$ con igualdad si y solo si $H = (\det(H))^{\frac{1}{n}}I$ (ver lema 4.4.6). Utilizando esto tenemos que

$$1 = \det(D_x F (D_x F)^*) \leq \left(\frac{\text{tr}(D_x F (D_x F)^*)}{n} \right)^n \leq \left[\text{tr} \left(\left(\frac{n-1}{n} \right)^2 (I - H)^{-1} H (I - H)^{-1} \right) \right]^n = (\text{tr}(H))^n = 1$$

Como vale la igualdad podemos concluir que

$$D_x F (D_x F)^* = [\det(D_x F (D_x F)^*)]^{\frac{1}{n}} I = I$$

En otras palabras, probamos que $D_x F$ es una isometría.

4.4. Lemas Auxiliares

En esta sección nos enfocaremos en probar las afirmaciones que vimos durante la demostración del teorema de la sección anterior.

Lema 4.4.1. Sean V, W espacios de Hilbert y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal acotada, entonces existe una única transformación acotada $T^* : W \rightarrow V$, que llamaremos adjunta, que cumple que para todo $v \in V$ y $w \in W$

$$\langle w, T(v) \rangle_W = \langle T^*(w), v \rangle_V$$

Demostración.

Fijemos $w \in W$, definimos $\alpha_w : V \rightarrow \mathbb{R}$ como $\alpha_w(v) = \langle T(v), w \rangle_W$, es claro que $\alpha_w \in V^*$. Para concluir utilizaremos el teorema de Riesz ², este nos decía que para toda funcional lineal continua $\varphi \in V^*$ se cumple que existe un único vector v_φ tal que

$$\varphi(x) = \langle v_\varphi, x \rangle_V.$$

Definimos entonces $T^*(w) := v_{\alpha_w}$, a partir de esta definición tanto la propiedad de linealidad como la de ser acotado son obvias. \square

²Ver [?] para prueba

Lema 4.4.2. Si A y B son matrices autoadjuntas y $A \leq B$ entonces $\text{tr}(A) \leq \text{tr}(B)$. Si además A es definida positiva entonces $\det(A) \leq \det(B)$.

Demostración.

Si $A \leq B$ entonces por definición $B - A$ es semidefinida positiva, en particular todos sus valores propios son no negativos, de ahí se sigue que $\text{tr}(B - A) \geq 0$ y por linealidad $\text{tr}(B) \geq \text{tr}(A)$.

Si además A es definida positiva entonces podemos escribir $A = PP^*$ para alguna matriz definida positiva P . Si definimos $Q := (P^*)^{-1}$ como $Q^*AQ = I$, observar que como B es autoadjunta también lo es Q^*BQ . Por lo tanto existe una matriz unitaria U y una matriz diagonal D tal que $(QU)^*B(QU) = D$, es más $(QU)^*A(QU) = U^*Q^*AQU = I$.

Como $A \leq B$ entonces $(QU)^*A(QU) \leq (QU)^*B(QU)$ o equivalentemente $I \leq D$, se sigue que $1 = \det(I) \leq \det(D)$ y por lo tanto $\det(A) \leq \det(B)$ \square

Lema 4.4.3. Definimos $H := \frac{1}{n}\psi^*\psi$, entonces se cumple que H es definida positiva y que $\text{tr}(H) = 1$.

Demostración.

Tomemos $e_1 := E_1(F(x)), \dots, e_n := E_n(F(x))$ la base ortonormal dada por el transporte paralelo de $T_{F(x)}\mathbb{H}^n$, entonces para todo $\theta \in \partial\mathbb{H}^n$

$$\nabla B_{f(\theta)}(F(x)) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla B_{f(\theta)}(F(x)), e_i \rangle e_i$$

Como el gradiente de las funciones de Busemann es un vector unitario entonces

$$1 = \sum_{i=1}^n \langle \nabla B_{f(\theta)}(F(x)), e_i \rangle^2$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \text{tr}(H) &= \text{tr} \left(\frac{1}{n} \psi^* \psi \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \psi^* \psi(e_i), e_i \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \psi(e_i), \psi(e_i) \rangle_{L^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\partial\mathbb{H}^n} [\sqrt{n} D_{F(x)} B_{f(\theta)}(e_i)]^2 d\mu_x = \int_{\partial\mathbb{H}^n} \sum_{i=1}^n \langle \nabla B_{f(\theta)}(F(x)), e_i \rangle d\mu_x = \int_{\partial\mathbb{H}^n} d\mu_x = 1 \end{aligned}$$

Para ver que H es definida positiva basta ver que $\psi^*\psi$ lo es. Supongamos que existe v tal que $\langle \psi^*\psi(v), v \rangle = 0$

$$0 = \langle \psi^*\psi(v), v \rangle = \langle \psi(v), \psi(v) \rangle_{L^2} \implies \psi(v) = 0 \text{ ctp}$$

Esto implica que $\nabla B_{f(\theta)}(F(x))$ es ortogonal a v para casi todo θ . Ahora como $\text{Leb}_{F(x)}(T_{F(x)}^1\mathbb{H}^n \cap v^\perp) = 0$, se sigue que $\nabla B_{f(\theta)}(F(x)) = 0$ para todo $\theta \in \partial\mathbb{H}^n$. \square

Lema 4.4.4. ϕ es un encaje isométrico de $T_x\mathbb{H}^n$ en $L^2(\partial\mathbb{H}^n, \mu_x)$, en otras palabras $\phi^*\phi = I$. Además $\phi\phi^* \leq I$.

Demostración.

Para probar que $\phi^*\phi = I$ basta probar que para todo vector unitario $u \in T_x\mathbb{H}^n$, $\langle \phi(u), \phi(u) \rangle_{L^2} = \langle u, u \rangle = 1$.

Sin pérdida de generalidad supongamos que nos encontramos en la bola de Poincaré y que O es el 0. Consideremos $u \in T_x \mathbb{H}^n$ y $v \in T_O \mathbb{H}^n$ vectores unitarios, utilizando las relaciones entre las funciones de Busemann, las medidas de visibilidad y las isometrías es fácil ver que

$$\langle \phi(u), \phi(u) \rangle_{L^2} = \langle \phi(v), \phi(v) \rangle_{L^2}$$

Por lo que basta mostrar que $\langle \phi(v), \phi(v) \rangle_{L^2} = 1$ en $T_O \mathbb{H}^n$, como vimos antes en ese caso μ_O es la medida de Lebesgue usual. Consideremos las coordenadas esféricas $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ y sin pérdida de generalidad $v = e_1$, como los rayos geodésicos que salen del O son rectas y $\nabla B_\theta(x)$ es colineal con la dirección de θ obtenemos por trigonometría que $D_O B_\theta(v) = \cos \theta_1$ y por lo tanto

$$\frac{1}{n} \langle \phi(v), \phi(v) \rangle = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta_1 \sin^{n-2} \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\theta_{n-1}$$

Donde $\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-2})$ es el volumen de la esfera, aplicando Fubini y que $\cos^2 \theta_1 = 1 - \sin^2 \theta_1$ podemos simplificar la cuenta de la siguiente forma:

$$\frac{1}{n} \langle \phi(v), \phi(v) \rangle_{L^2} = \frac{\int_0^\pi (1 - \sin^2 \theta_1) \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1}{\int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1} = 1 - \frac{\int_0^\pi \sin^n \theta_1 d\theta_1}{\int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1}$$

Integrando por partes observamos que

$$\int_0^\pi \sin^n \theta d\theta = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta d\theta$$

De esto podemos concluir que

$$\langle \phi(v), \phi(v) \rangle_{L^2} = n \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) = 1 \implies \phi^* \phi = I$$

Para la segunda parte basta ver que como $\phi^* \phi = I$ entonces $(\phi^* \phi)^2 = \phi^* \phi$. Como además $\phi \phi^*$ es autoadjunta entonces $\phi \phi^*$ es la proyección ortogonal de la imagen por lo tanto $\phi \phi^* \leq I$

□

Lema 4.4.5. Si $n \geq 3$ y H es una matriz simétrica definida positiva de tamaño $n \times n$ y $\text{tr}(H) = 1$ entonces

$$\frac{\det(H)}{\det(I - H)^2} \leq \left(\frac{n}{(n-1)^2} \right)^n$$

Con igualdad si y sólo si $H = \frac{1}{n} I$

Demostración.

Como H es una matriz simétrica definida positiva entonces es diagonalizable por lo tanto podemos traducir el problema al siguiente:

Para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{\Delta}^{n-1}$ se cumple que

$$f(x) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)^2} \leq \left(\frac{n}{(n-1)^2} \right)^n$$

Con igualdad si y sólo si $x_i = \frac{1}{n}$ para todo i y donde

$$\Delta^{n-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \text{ y } x_i \geq 0 \forall i \right\}$$

Para probar esto utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, definimos

$$f(x) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)^2} \quad g(x) = x_1 + \dots + x_n$$

Nuestro interés es encontrar el valor máximo de f en el conjunto $g^{-1}(\{1\}) \cap \dot{\Delta}^{n-1}$, derivando obtenemos

$$\nabla g(x) = (1, \dots, 1) \quad \nabla f(x) = f(x) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{2}{1-x_1}, \dots, \frac{1}{x_n} + \frac{2}{1-x_n} \right)$$

Si suponemos que $\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)$ es fácil deducir que para todo i, j se cumple

$$\frac{1}{x_i} + \frac{2}{1-x_i} = \frac{1}{x_j} + \frac{2}{1-x_j}$$

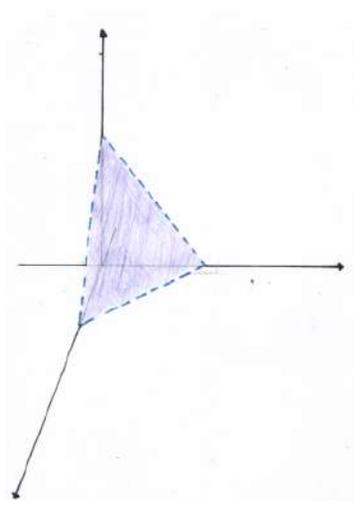


Figura 4.5: Conjunto Δ^2

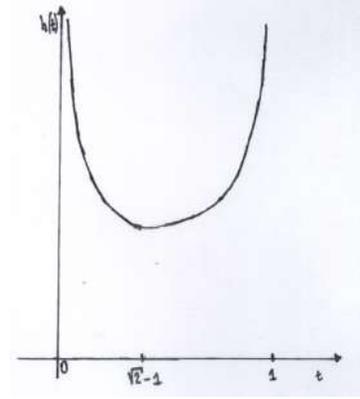


Figura 4.6: Gráfico de la función h

Consideremos $h(t) := \frac{1}{t} + \frac{2}{1-t}$, es fácil ver que tiene un único mínimo en $[0, 1]$ que ocurre en $t = \sqrt{2} - 1$. Como f es una función simétrica podemos suponer que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. La idea es ver que f contiene un único punto crítico y que este ocurre cuando $x_i \leq \sqrt{2} - 1$ para todo i . Luego como h es inyectiva en $(0, \sqrt{2} - 1]$ existe una única solución en esa región, y esta será $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1/n$.

Supongamos que $1 > x_1, \dots, x_k > \sqrt{2} - 1$ y $0 < x_{k+1}, \dots, x_n \leq \sqrt{2} - 1$. Entonces como h es inyectiva tanto en $(0, \sqrt{2} - 1]$ y en $[\sqrt{2} - 1, 1)$ se sigue que $x_1 = \dots = x_k$ y $x_{k+1} = \dots = x_n$. Como $\sum_i x_i = 1$,

$$1 = kx_1 + (n-k)x_n \geq k(\sqrt{2} - 1)$$

y por lo tanto $k \leq 2$, por lo que tenemos dos casos para descartar.

Si $k = 1$ entonces $x_2 = \dots = x_n = \frac{1-x_1}{n-1}$, es más

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{1-x_1} = h(x_1) = h(x_n) = \frac{n-1}{1-x_1} + \frac{2(n-1)}{n-2+x_1}$$

Las únicas soluciones a esta última ecuación son tanto $x_1 = \frac{1}{n}$ y $x_1 = n - 2$. Sin embargo solo nos interesa la primera solución, pero en ese caso $x_1 < \sqrt{2} - 1$ y sería una contradicción. Cuando $k = 2$, el razonamiento es análogo y por lo tanto también queda descartado.

Por ende el único punto crítico es de la forma $x = (\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$. Nos resta ver que sucede en el borde, supongamos que $x_1 = 0$ y que $x_i \neq 1$ con $i = 2, \dots, n$, en ese caso f está definida y vale 0. Supongamos ahora que $x_1 = 1 - \delta$, entonces $\sum_{i=2}^n x_i = \delta$.

Apliquemos ahora el mismo razonamiento para el conjunto

$$\Delta_\delta^{n-2} := \{(x_2, \dots, x_n) : \sum_{i=2}^n x_i = \delta\}.$$

El único punto crítico será $(\frac{\delta}{n-1}, \dots, \frac{\delta}{n-1})$, además en ese caso f está bien definida en el borde y vale 0, por ende este punto es un máximo. Con esto en mente se sigue que

$$f(x) = \frac{x_1 \prod_{i=2}^n x_i}{(1-x_1)^2 \prod_{i=2}^n (1-x_i)^2} \leq \frac{(1-\delta)\delta^{n-1}}{\delta^2(n-1-\delta)^{2(n-1)}(n-1)^{n-1}} = \frac{(1-\delta)\delta^{n-3}}{(n-1-\delta)^{2(n-1)}(n-1)^{n-1}}$$

Si $n \geq 4$, entonces cuando $\delta \rightarrow 0$ se tiene que $f(x) \rightarrow 0$. Si $n = 3$, entonces

$$f(x) \leq \frac{(1-\delta)}{4(2-\delta)^2}$$

Tomando δ suficientemente chico se tiene que $f(x) \leq 1/18$, por otro lado

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{(1/3)^3}{(2/3)^3} = \frac{1}{8}$$

Con esto concluimos lo que queríamos probar. □

Lema 4.4.6. Si H es una matriz simétrica definida positiva entonces $\det(H) \leq \left(\frac{\text{tr}(H)}{n}\right)^n$ con igualdad si y solo si $H = (\det(H))^{\frac{1}{n}} I$.

Demostración.

Al igual que en la demostración anterior, del hecho que H es una matriz simétrica definida positiva deducimos que es diagonalizable con valores propios positivos $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Se sigue que la desigualdad es equivalente a probar que

$$\lambda_1 \dots \lambda_n \leq \left(\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n}\right)^n$$

Esta última inecuación es una deducción directa de la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmético. □

Capítulo 5

Variedades Hiperbólicas

5.1. Definición y Equivalencias

Diremos que una variedad M admite una *estructura hiperbólica* (o que es una *variedad hiperbólica*) si existe un cubrimiento $\{U_i\}$ de M y un conjunto de mapas abiertos diferenciables $\{\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{H}^n\}$ que cumplen:

1. $\psi_i : U_i \rightarrow \psi_i(U_i)$ es un difeomorfismo.
2. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ entonces la restricción $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ a $\psi_j(U_i \cap U_j)$ es la restricción a un elemento de $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$.

Nuestro principal objetivo en este capítulo es probar el siguiente teorema, la prueba en un caso más general se puede encontrar en [1].

Teorema 5.1.1. *Sea M una variedad conexa y completa, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. M es una variedad hiperbólica
2. M admite una métrica de curvatura seccional constante -1
3. M es isométrico a \mathbb{H}^n/Γ donde Γ es un subgrupo discreto del grupo de isometrías de \mathbb{H}^n isomorfo a $\pi_1(M)$.

Lema 5.1.2. *Si M es una variedad hiperbólica, entonces admite una métrica de curvatura seccional constante -1 .*

Demostración.

Sea U entorno de M y $\psi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ mapa asociado a la estructura hiperbólica, definimos la métrica en U como $\psi^*(g)$ donde g es la métrica hiperbólica. Es claro que está bien definida del hecho que si $\hat{\psi} : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ es otro mapa entonces $\hat{\psi} \circ \psi^{-1}$ es una restricción de las isometrías de \mathbb{H}^n y por lo tanto $(\hat{\psi} \circ \psi^{-1})^*(g) = g$. \square

Lema 5.1.3. *Consideremos M una variedad hiperbólica conexa y simplemente conexa, sea $\psi_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{H}^n$ una isometría definida en el abierto conexo U_0 . Entonces existe una única isometría local de $D : M \rightarrow X$ que extiende a ψ_0 .*

Demostración.

La unicidad es clara. Para la existencia fijemos $p_0 \in U_0$, sean $p \in M$ arbitrario y $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ curva diferenciable que cumple que $\alpha(0) = p_0$, $\alpha(1) = p$ y $\alpha^{-1}(U_0)$ es un intervalo. Si $L := \alpha([0, 1])$, tomemos un subconjunto $\{U_i, \psi_i\}_{i=1}^m$ de un atlas maximal que cumple que:

1. $\alpha^{-1}(U_i) = I_i$ es un intervalo para $i = 1, \dots, m$
2. $L \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$
3. $I_i \cap I_j = \emptyset$ si $|i - j| \geq 2$
4. $U_i \cap U_j$ es conexo para todo par $i, j = 0, \dots, m$

Consideremos $\varphi_i \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ que extiende a $\psi_i \circ \psi_{i-1}^{-1}$, definimos D en L como:

$$D|_{U_0 \cap L} = \psi_0|_L \quad D|_{U_1 \cap L} = \varphi_1^{-1} \circ (\psi_1|_L) \quad \dots \quad D|_{U_m \cap L} = \varphi_1^{-1} \circ \dots \circ \varphi_m^{-1} \circ (\psi_m|_L)$$

Es claro que esta definición coincide en las intersecciones, esto nos permite definir $D(p)$, nos resta probar:

- (a) $D(p)$ no depende de U_1, \dots, U_m .
- (b) $D(p)$ no depende de α .

Es claro que una vez probadas estas dos afirmaciones probamos el lema dado que D claramente extiende a ψ_0 y que además es una isometría local dado que en un entorno de p D es de la forma $\varphi_1^{-1} \circ \dots \circ \varphi_m^{-1} \circ \psi_m$. Por lo tanto probemos las afirmaciones:

- (a) Basta probarlo para el caso en el que L puede ser cubierto por $\{U_0, U_1\}$ y $\{U_0, \hat{U}_1\}$ (el caso general se sigue por inducción), por simplicidad supongamos que $U_1 \cap \hat{U}_1$ es conexo. Como $U_0 \cap U_1 \cap \hat{U}_1 \neq \emptyset$, si $\varphi \in \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ es una isometría que extiende a $\psi_1 \circ \hat{\psi}_1^{-1}$, que cumple que $\varphi = \varphi \circ \hat{\varphi}_1^{-1}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} D|_{U_1 \cap \hat{U}_1 \cap L} = \varphi_1^{-1} \circ \psi_1|_{U_1 \cap \hat{U}_1 \cap L} &\implies \\ \hat{D}|_{U_1 \cap \hat{U}_1 \cap L} = \hat{\varphi}_1^{-1} \circ \hat{\psi}_1|_{U_1 \cap \hat{U}_1 \cap L} = \varphi_1^{-1} \circ \varphi \circ \hat{\psi}_1|_{U_1 \cap \hat{U}_1 \cap L} &= \varphi_1^{-1} \circ \psi_1|_{U_1 \cap \hat{U}_1 \cap L} \\ \implies D|_{U_0 \cap L} = \hat{D}|_{U_0 \cap L} = \psi_0|_{U_0 \cap L} & \end{aligned}$$

Se sigue que $D = \hat{D}$ en L y en particular en p .

- (b) Sean α_0 y α_1 dos curvas diferenciables que unen p_0 con p , consideremos H una homotopía diferenciable entre α_0 y α_1 . Podemos encontrar dos subdivisiones de $[0, 1]$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1 \quad 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_l = 1$$

de tal forma que para todo i, j el conjunto $H([t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j])$ está contenido en un conjunto coordenado del atlas maximal. Por lo tanto podemos modificar α_0 para obtener α_1

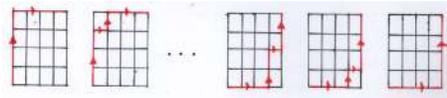


Figura 5.1: Modificaciones paso a paso

Aplicando un argumento similar al de la parte anterior podemos deducir que el valor de $D(p)$ no se altera en cada paso, concluyendo la prueba. □

Proposición. 5.1.4. *Toda variedad hiperbólica conexa, completa y simplemente conexa es isométrica a \mathbb{H}^n .*

Demostración.

Sea D una isometría local dada por el lema. La siguiente afirmación nos servirá para probar la proposición:

Afirmación. *Para todo $x \in D(M)$, $\hat{x} \in D^{-1}(\{x\})$, $\alpha \in C^1([0, 1], \mathbb{H}^n)$ con $\alpha(0) = x$, existe único $\hat{\alpha} \in C^1([0, 1], M)$ con $\hat{\alpha}(0) = \hat{x}$, $D \circ \hat{\alpha} = \alpha$.*

Es más, si la afirmación vale, entonces podemos levantar homotopías C^1 entre curvas en $D(M)$. Se sigue que si $D(x) = D(x')$ y α es una curva en M , entonces existe una homotopía entre $D \circ \alpha$ y $D(x)$, como podemos levantar la homotopía entonces obtenemos que α es un lazo y por lo tanto $x = x'$. La sobreyectividad es obvia de la afirmación, por lo tanto D es una isometría.

Probemos la afirmación, fijemos x , \hat{x} y α , observar que si para $0 < t \leq 1$ existe $\hat{\alpha}^{(t)} \in C^1([0, t], M)$ tal que $\hat{\alpha}^{(t)}(0) = \hat{x}$ y $D \circ \hat{\alpha}^{(t)} = \alpha|_{[0, t]}$, entonces $\tilde{\alpha}^{(t)}$ es única. En particular si $\hat{\alpha}^{(t_1)}$ y $\hat{\alpha}^{(t_2)}$ son definidas para $t_1 < t_2$ entonces $\hat{\alpha}^{(t_2)}|_{[0, t_1]} = \hat{\alpha}^{(t_1)}$. Con esto en mente definimos

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : \exists \tilde{\alpha} \in C^1([0, t], M) \text{ tal que } \tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}, D \circ \tilde{\alpha} = \alpha|_{[0, t]}\}$$

Como D es una isometría local entonces necesariamente $t_0 > 0$ por lo que basta probar que $t_0 = 1$. Afirmamos que existe una $\hat{\alpha}$ que está definida en $[0, t_0]$, probado esto concluimos la proposición dado que D es una isometría en un entorno de $\hat{\alpha}(t_0)$ y por lo tanto t_0 tiene que ser 1.

Para ver esto último afirmamos que si $\{t_n\}$ es una sucesión creciente que converge a t_0 entonces $\hat{\alpha}(t_n)$ es una sucesión de Cauchy en M .

Supongamos por absurdo que $\hat{\alpha}(t_n)$ no es de Cauchy, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo n_0 existen $n, m \geq n_0$ tal que $d(\hat{\alpha}(t_n), \hat{\alpha}(t_m)) \geq \varepsilon$. Se sigue que la longitud de $\hat{\alpha}$ es infinita.

Para ver que esto es absurdo tomemos una sucesión $\{I_j\}$ de intervalos semi-abiertos tal que $[0, t_0)$ es unión disjunta de estos y que $\hat{\alpha}|_{I_j} = (D|_{U_j})^{-1} \circ \alpha|_{U_j}$ donde U_j es un abierto donde D es una isometría. Entonces:

$$\ell(\hat{\alpha}) = \sum_j \int_{I_j} \|\dot{\hat{\alpha}}(s)\| ds = \sum_j \int_{I_j} \|\dot{\alpha}(s)\| ds = \ell(\alpha|_{[0, t_0)}) \leq \ell(\alpha) < \infty$$

Por lo que $\tilde{\alpha}(t_n)$ es de Cauchy, como M es completo definimos $\tilde{\alpha}(t_0) = \lim \tilde{\alpha}(t_n)$, además como $\tilde{\alpha}$ es un levantado de α entonces es diferenciable en t_0 , concluyendo lo que queríamos probar. □

Demostración del Teorema.

1. \implies 2. Esto es el lema 5.1.2..

2. \implies 3. Como M admite tal métrica, entonces su cubrimiento universal riemanniano \tilde{M} también admite una métrica de curvatura seccional -1 . Por la proposición anterior podemos deducir entonces que \tilde{M} es isométrico a \mathbb{H}^n y por lo tanto M es isométrico a \mathbb{H}^n/Γ , donde $\Gamma < \mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ son las transformaciones de cubrimiento.

3. \implies 1. Esto último es obvio dado que como las transformaciones de cubierto son isometrías, entonces para todo $x \in \mathbb{H}^n/\Gamma$ basta tomar sus entornos bien cubiertos. □

5.2. Construcción a través de poliedros

Diremos que P es un *poliedro* si es la intersección numerable de medios espacios abiertos, con la propiedad que todo compacto de \mathbb{H}^n se interseca en finitos hiperplanos. La clausura \bar{P} , que también llamaremos poliedro, tiene una descomposición celular natural dada por la intersección de los hiperplanos. Las k -células en la descomposición las llamaremos k -caras de P . En el caso que las caras sean de codimensión 1 las llamaremos bordes y si son de codimensión 2 las llamaremos lados.



Figura 5.2: Poliedro hiperbólico de dimensión 3

Proposición. 5.2.1. Sean $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ una variedad hiperbólica completa y $x_0 \in \mathbb{H}^n$, entonces el siguiente poliedro es un dominio fundamental

$$P = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) \leq d(x, \varphi(x_0)) \forall \varphi \in \Gamma\}.$$

Demostración.

Fijados $y_1, y_2 \in \mathbb{H}^n$, es claro que el conjunto $\{y \in \mathbb{H}^n : d(y, y_1) = d(y, y_2)\}$ es un hiperplano hiperbólico. Como Γ es discreto, para todo $x \in \mathbb{H}^n$ el conjunto $\{d(x, \varphi(x_0)) : \varphi \in \Gamma\}$ presenta un mínimo en $d(x, \varphi_0(x_0))$, esto implica que $x \in \varphi_0(P)$, por ende la órbita de P cubre \mathbb{H}^n . Finalmente, para $\varphi \in \Gamma \setminus \{id\}$ es claro que $\varphi(P) \cap P \subset \partial P$. Concluyendo que P es un dominio fundamental. □

A partir de esto, es bastante natural cuestionarse que debería cumplir un poliedro para ser el dominio fundamental de una variedad hiperbólica. El siguiente teorema nos proporciona una respuesta cuando nuestros poliedros son compactos.

Teorema 5.2.2 (Teorema de Poincaré). Sea P un poliedro compacto de \mathbb{H}^n donde todos los ángulos diedrales son de la forma π/k . Entonces el grupo generado por las simetrías con respecto a las caras es discreto en $\mathcal{I}(\mathbb{H}^n)$ y P es un polígono fundamental.

Para ver este enunciado y la demostración en dimensión 2 ver [2] y el caso general ver [9]. Como corolario directo de este teorema podemos deducir que las superficies compactas de género $g \geq 2$ admiten una estructura hiperbólica.

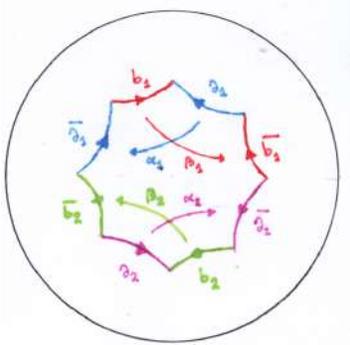


Figura 5.3: Octógono Hiperbólico

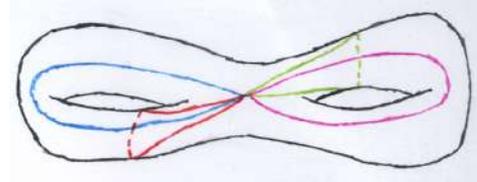


Figura 5.4: Bitoro con el pegado

5.3. Construcción con Pseudo-Anosov

La construcción de ejemplos de variedades hiperbólicas en dimensión mayor a 2 no es una tarea fácil. Thurston probó el siguiente resultado que es de suma utilidad a la hora de encontrar ejemplos de 3-variedades hiperbólicas compactas.

Sea S una superficie compacta orientable de género $g \geq 2$ y $f : S \rightarrow S$ un homeomorfismo, definimos el mapping torus como

$$M_\phi := S \times S / (x, 1) \sim (f(x), 0)$$

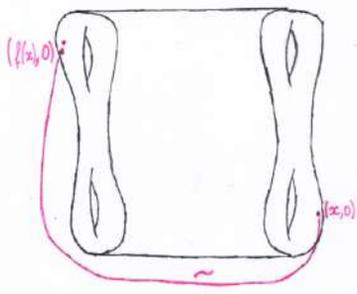


Figura 5.5: Ejemplo de Mapping torus

Teorema (Geometrización de Thurston). M_ϕ es una variedad hiperbólica si y solo si ϕ es un mapa pseudo-Anosov.

Para profundizar en este teorema ver [11]. En lo que resta de la sección trataremos de comprender que significa que un mapa sea pseudo-Anosov y veremos como construir ejemplos, para esto nos basaremos en [5].

Una foliación con medida F en S es una estructura geométrica en S que consiste en una foliación singular y una medida en la dirección transversa.

Una mapa f es *pseudo-Anosov* si existen un par de foliaciones con medida (\mathcal{F}^u, μ_u) y (\mathcal{F}^s, μ_s) en S (con singularidades) que son transversales y un real $\lambda > 1$ tal que

$$f \cdot (\mathcal{F}^s, \mu_s) = (\mathcal{F}^s, \mu^{-1} \mu_s) \quad \text{y} \quad f \cdot (\mathcal{F}^u, \mu_u) = (\mathcal{F}^u, \lambda \mu_u)$$

Las foliaciones (\mathcal{F}^u, μ_u) y (\mathcal{F}^s, μ_s) las llamaremos foliaciones inestable y estables respectivamente, y a λ lo llamaremos el factor de dilatación de f . Una posible interpretación geométrica es que dada una curva cerrada simple α se tiene que $\phi^n(\alpha)$ limita con \mathcal{F}^u mientras que $\phi^{-n}(\alpha)$ limita con \mathcal{F}^s .

Definimos $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ como el difeomorfismo inducido por una matriz $A \in SL_2(\mathbb{Z})$. No es difícil ver que el conjunto de puntos periódicos de f_A es denso en el toro por lo que tomemos F potencia de f_A tal que fija $2g - 2$ puntos. Se sigue que para superficies de género $g \geq 2$ es posible construir pseudo-Anosov como el levantado de F a través de un cubrimiento ramificado de grado 2 y $2g - 2$ puntos de ramificación.¹

¹Se recomienda ver [10] para lograr tener una mejor comprensión.

Capítulo 6

Rigidez de Mostow

Dada M una n -variedad hiperbólica conexa cerrada orientable, definimos el espacio de deformación $\mathcal{R}(M)$ como el conjunto de estructuras hiperbólicas a menos de isometría. Como veremos en la sección siguiente, se cumple que si M es una superficie de género $g \geq 2$ entonces $\mathcal{R}(M) \simeq \mathbb{R}^{6g-6}$, nos basaremos de [12] para explicar esto.

Si M es una variedad de dimensión $n \geq 3$ entonces se tiene que $\mathcal{R}(M)$ es un único punto. Esto es una consecuencia directa del Teorema 1, recordémoslo.

Teorema 1 (Rigidez de Mostow). *Sean M y N variedades hiperbólicas compactas y orientables de dimensión mayor o igual a 3. Supongamos que $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ es un isomorfismo entonces existe una isometría $\varphi : M \rightarrow N$ tal que $\varphi_* = \rho$*

En la última sección de este capítulo nos dedicaremos a dar una demostración del teorema, para algunas partes nos basaremos en [1] y en [14].

6.1. Estructuras hiperbólicas en dimensión 2

Consideremos S una superficie de género $g \geq 2$, nos enfocaremos en dar una breve idea de su espacio de deformación $\mathcal{R}(S)$.

Definimos el *par de pantalones* P como la esfera menos 3 discos abiertos.

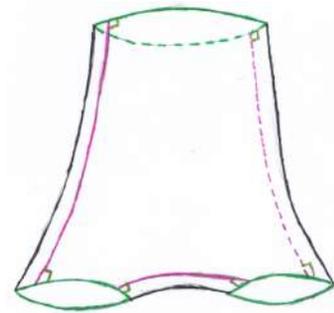


Figura 6.1: Par de Pantalones

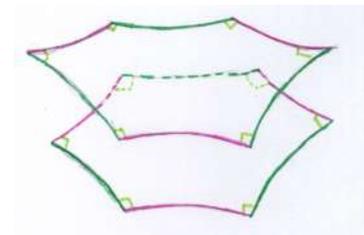


Figura 6.2: Pegado de Hexágonos para formar P

Como vemos en la figura 6.2 es posible asignarle una estructura hiperbólica al par de pantalones a

través del pegado de dos hexágonos hiperbólicos con ángulos rectos isométricos. Esto nos motiva a definir el siguiente conjunto

$$\text{Hex} = \{\text{hexágonos marcados con ángulos rectos}\}/\text{Isom}$$

Podemos definir el espacio de deformación de P como el conjunto $\mathcal{R}(P)$ de variedades hiperbólicas a menos de isometría, se sigue entonces que existe una biyección natural entre Hex y este conjunto. El siguiente teorema en particular nos muestra que podemos identificar a $\mathcal{R}(P)$ como una variedad de dimensión 3.

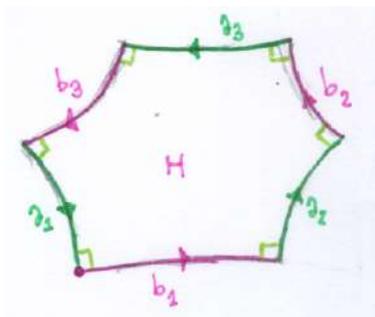


Figura 6.3: Hexágono de ángulos rectos

Teorema 6.1.1. *El mapa $L : \text{Hex} \rightarrow (0, \infty)^3$*

$$H \mapsto (\ell(a_1), \ell(a_2), \ell(a_3))$$

es una biyección.

En otras palabras, una estructura hiperbólica en un par de pantalones queda únicamente determinada por la longitud de los lados del borde.

Volviendo a la superficie S , notar que podemos descomponerla como $2g - 2$ par de pantalones cortando $3g - 3$ curvas cerradas simples como vemos en la siguiente figura. Es más, podemos suponer que estas curvas son geodésicas.

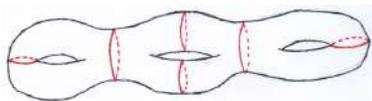


Figura 6.4: Descomposición en pantalones de un tritoro

Observar entonces que las estructuras hiperbólicas no isométricas de los $2g - 2$ pantalones disjuntos forman un espacio de dimensión $3(2g - 2)$. Como nuestro interés es ver como nos queda el espacio de estructuras hiperbólicas en la superficie, tenemos que asegurarnos que los pantalones se pegan correctamente.

Esto implica que las curvas que se pegan tienen que tener la misma longitud, esto nos proporciona $3g - 3$ restricciones. Sin embargo, a lo largo de cada curva que pegamos podemos pegar las piernas de los pantalones con un twist de algún ángulo, esto nos proporciona $3g - 3$ grados de libertad. Se sigue entonces que el espacio de deformación de S tiene una estructura de variedad de dimensión $6g - 6$.¹

¹Para ver estos resultados de forma formal se recomienda ver [9] y [11].

6.2. Demostración del Teorema

Proposición. 6.2.1. Sean M y N variedades hiperbólicas compactas, $\rho : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ un isomorfismo. Entonces existe una equivalencia homotópica $f : M \rightarrow N$ que cumple que:

1. $f_* = \rho$.
2. existe \hat{f} levantado al cubrimiento universal equivariante y homotópico a una cuasi-isometría.

Demostración.

Como tanto M como N son variedades hiperbólicas, por el teorema 5.1.1 podemos suponer que $M = \mathbb{H}^n/\Gamma_1$ y $N = \mathbb{H}^n/\Gamma_2$, donde $\Gamma_1 \simeq \pi_1(M)$ y $\Gamma_2 \simeq \pi_1(N)$ son subgrupos discretos de $\mathcal{I}^+(\mathbb{H}^n)$, en particular \mathbb{H}^n es el cubrimiento universal de ambas variedades. Como \mathbb{H}^n es contractible entonces el tipo de homotopía queda determinado por el grupo fundamental, en otras palabras existe una equivalencia homotópica $f_0 : M \rightarrow N$ tal que $(f_0)_* = \rho$.

Como las variedades son compactas, todo mapa continuo es homotópico a uno diferenciable. Por lo tanto podemos suponer que tanto f_0 como su inversa homotópica g_0 son funciones suaves. Consideremos $\hat{f}_0 : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ un levantado de f_0 de tal forma que se siga manteniendo la equivalencia homotópica.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f_0} & N \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\hat{f}_0} & \mathbb{H}^n \end{array}$$

Por compacidad tenemos que las normas de Df_0 y Dg_0 están uniformemente acotadas por una constante c , al ser las proyecciones isometrías locales se tiene que $D\hat{f}_0$ y $D\hat{g}_0$ también está uniformemente acotada por la misma constante. Del teorema del valor medio obtenemos que

$$d(\hat{f}_0(x), \hat{f}_0(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{H}^n$$

$$d(\hat{g}_0(x), \hat{g}_0(y)) \leq c d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{H}^n$$

Por otro lado como se cumple tanto para f como para g que $\hat{f}_0(\varphi x) = \rho(\varphi)\hat{f}_0(x)$ y $(g_0)_* = (f_0)_*^{-1}$ se sigue que

$$\hat{g}_0 \circ \hat{f}_0 \circ \varphi = \hat{g}_0 \circ (f_0)_*(\varphi) \circ \hat{f}_0 = ((g_0)_* \circ (f_0)_*)(\varphi) = \varphi \circ \hat{g}_0 \circ \hat{f}_0$$

Utilizando esto último y que Γ_1 admite un dominio fundamental compacto se sigue que existe $k > 0$ tal que

$$d(y, (\hat{g}_0 \circ \hat{f}_0)(y)) \leq k \quad \forall y \in \mathbb{H}^n$$

Aplicando desigualdad triangular podemos deducir que

$$d\left((\hat{g}_0 \circ \hat{f}_0)(y_1), (\hat{g}_0 \circ \hat{f}_0)(y_2)\right) \geq d(y_1, y_2) - 2k$$

y por lo tanto concluimos que

$$d\left(\hat{f}_0(x_1), \hat{f}_0(x_2)\right) \geq \frac{1}{c} d\left((\hat{g}_0 \circ \hat{f}_0)(x_1), (\hat{g}_0 \circ \hat{f}_0)(x_2)\right) \geq \frac{1}{c} d(x_1, x_2) - \frac{2k}{c}$$

Con esto concluimos que \hat{f}_0 es una cuasi-isometría. □

Lema 6.2.2. La cuasi-isometría de la proposición anterior induce un homeomorfismo en el borde equivariante. Es más, la extensión baricéntrica asociada a este homeomorfismo también es equivariante

Demostración.

Por el teorema 3.2.9 sabemos que \hat{f}_0 induce un homeomorfismo $f : \partial\mathbb{H}^n \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$, recordemos que este mapa manda fines de geodésicas en fines de geodésicas, es decir, si γ es una geodésica

$$\gamma(\infty) \mapsto \hat{f}_0 \circ \gamma(\infty)$$

Como \hat{f}_0 es equivariante entonces si $\xi = \gamma(\infty)$ tenemos $f(\varphi \xi) = \hat{f}_0(\varphi \gamma(\infty)) = \rho(\varphi) \circ \hat{f}_0(\gamma(\infty)) = \rho(\varphi) \circ f(\xi)$.

Sea F la extensión baricéntrica asociada al homeomorfismo f que nos da el teorema 2 veamos primero que nada que es equivariante. Sea $\varphi \in \Gamma_1$, entonces

$$\begin{aligned} F(\varphi x) &= \text{bar}(f_*[\mu_{\varphi x}]) = \text{bar}(f_*[\varphi_*[\mu_x]]) = \text{bar}((f \circ \varphi)_*[\mu_x]) \\ &= \text{bar}((\rho(\varphi) f)_*[\mu_x]) = \rho(\varphi) (\text{bar}(f_*[\mu_x])) = \rho(\varphi) F(x) \end{aligned}$$

Esto demuestra que F baja al cociente como un mapa que denotaremos φ y que además $\varphi_* = \rho$. \square

Lema 6.2.3. φ es una isometría.

Demostración.

De la equivariancia de F tenemos que φ es una equivalencia homotópica, por lo que el grado de φ es ± 1 , esto en particular nos muestra que φ tiene que ser sobreyectiva.

Como el cubrimiento es una isometría local se sigue que para todo $x \in M$ se cumple que $|\text{Jac}_x \varphi| \leq 1$, sin pérdida de generalidad supongamos que $\text{Vol}(M) \leq \text{Vol}(N)$, entonces

$$\text{Vol}(N) = \int_N dV_2 = \int_M dF^*(V_2) = \int_M |\text{Jac}(F)| dV_1 \leq \int_M dV_1 = \text{Vol}(M)$$

De ahí concluimos que $\text{Vol}(M) = \text{Vol}(N)$ y $|\text{Jac}_x(\varphi)| = 1$ ctp. Como el jacobiano es continuo podemos concluir que la igualdad vale para todo punto. Entonces aplicando el teorema 2 nuevamente tenemos que $\forall x \in M$ $D_x \varphi$ es una isometría, y por lo tanto φ lo es. \square

Apéndice A

Grado de una función

Tomemos M y N n -variedades riemannianas compactas, conexas y orientables. Sea $f : M \rightarrow N$ mapa suave y p un valor regular, consideremos el conjunto finito

$$f^{-1}(\{p\}) = \{x_1, \dots, x_k\}.$$

Como p es un valor regular, recordemos que por el teorema de la función inversa en un entorno de x_i el mapa f es un difeomorfismo. Sean $r(p) := \#\{x_i \in f^{-1}(\{p\}) : D_{x_i}f \text{ preserva orientación}\}$ y $s(p) := \#\{x_i \in f^{-1}(\{p\}) : D_{x_i}f \text{ revierte orientación}\}$.

Lema A.1. *El mapa $p \mapsto r(p) - s(p)$ es constante en los valores regulares.*

Esto último nos permite definir el grado de f , que denotaremos $\deg f$, como esta resta. Notar que si $\deg f \neq 0$ entonces f es una función sobreyectiva.

Supongamos que f no es sobreyectiva, entonces el conjunto $N \setminus f(M)$ es no vacío. Por definición, si $p \in N \setminus f(M)$ entonces es un valor regular, como $f^{-1}(\{p\}) = \emptyset$ concluimos que $\deg f = 0$.

Proposición A.2. *Supongamos que f es una equivalencia homotópica entonces $|\deg f| = 1$.*

Denotemos dV_1 y dV_2 las formas de volumen asociadas a M y N respectivamente.

Teorema A.3. *Supongamos que $\deg f = 1$, entonces se cumple*

$$\text{Vol}(N) = \int_N dV_2 = \int_M f^*[dV_2] = \int_M |\text{Jac } f| dV_1$$

1

¹Ver [14] para profundizar

Bibliografía

- [1] Benedetti, R., & Petronio, C. (1992). *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Science & Business Media.
- [2] Bergeron, N., & Guilloux, A. GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES DE SURFACE. *M2 de Mathématiques fondamentales*, 25.
- [3] Besson, G., Courtois, G., & Gallot, S. (1996). Minimal entropy and Mostow's rigidity theorems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 16(4), 623-649.
- [4] Bridson, M. R., & Haefliger, A. (2013). *Metric spaces of non-positive curvature* (Vol. 319). Springer Science & Business Media.
- [5] Farb, B., & Margalit, D. (2011). *A primer on mapping class groups (pms-49)* (Vol. 41). Princeton university press.
- [6] Feres, R. (1996). The minimal entropy theorem and Mostow rigidity, after G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot.
- [7] Hubbard. J. H. (2006) *Teichmüller Theory And Applications To Geometry, Topology, And Dynamics. Volume 1 Teichmüller Theory* Matrix Press.
- [8] Lee, J. M. (2006). *Riemannian manifolds: an introduction to curvature* (Vol. 176). Springer Science & Business Media.
- [9] Maskit, B. (2012). *Kleinian groups* (Vol. 287). Springer Science & Business Media.
- [10] Pansu, P. (1996). *Volume, courbure et entropie. Séminaire Bourbaki, exposé n 0*, 823, 83-103.
- [11] Thurston, W. P. (1998). Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *arXiv preprint math/9801045*.
- [12] Thurston, W. P. (2014). Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1. *In Three-Dimensional Geometry and Topology, Volume 1*. Princeton university press.
- [13] Udriste, C. (1994). *Convex functions and optimization methods on Riemannian manifolds* (Vol. 297). Springer Science & Business Media.
- [14] Saunderson, J. (2008). *Mostow's rigidity theorem* (Doctoral dissertation, Ph. D. thesis, Univ. of Melbourne).